Introducción a las Coordenadas Polares

M. I. Caicedo

Departamento de Física, USB

1. La Base de Vectores Móviles

Consideremos una partícula puntual que describe una trayectoria circular de radio R, sean: θ el ángulo que forman el eje x y $\vec{r}(t)$ el vector de posicin de la partícula.

Un ejercicio elemental de geometría nos permite expresar el vector de posición en la forma:

$$\vec{r}(t) = R\,\left[cos\theta(t)\,\hat{\imath} + sen\theta(t)\,\hat{\jmath}\right] \tag{1}$$

en donde estamos destacando que, en vista de que la partícula se mueve sobre un círculo de radio R (i.e. $|\vec{r}(t) = R|$, toda la dependencia temporal de $\vec{r}(t)$ tiene que estar en el ángulo.

Es facil darse cuenta de que podemos rescribir el vector de posición en la forma

$$\vec{r}(t) = R\,\hat{u}_r(t) \tag{2}$$

donde el vector $\hat{u}_r(t)$ está dado por

$$\hat{u}_r(t) \equiv\ cos\theta(t)\,\hat{\imath} + sen\theta(t)\,\hat{\jmath} \tag{3}$$

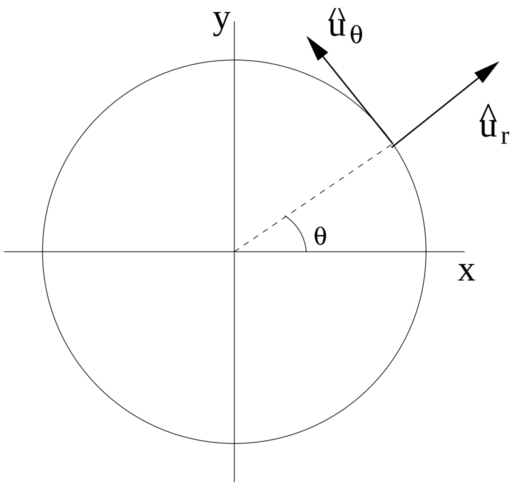

Figura 1: Los vectores polares $\hat{u}_r$ y $\hat{u}_\theta$. Nótese que se deben entender como vectores móviles cuyo origen está localizado en el punto en que se encuentra la partícula

Arriesgándonos a estar llamando la atención sobre algo demasiado obvio notemos que $\hat{u}_r(t)$ es un vector que tiene tres propiedades:

1. *es un vector unitario*
2. *en cada instante de tiempo $\hat{u}_r$ es paralelo al vector de posición $\vec{r}$ y en consecuencia:*
3. *es un vector variable (su dependencia en el tiempo es implícita ya que est' asociada al hecho de que $\hat{u}_r$ depende en forma explícita del angulo θ.*

En vista de la última de estas propiedades podemos calcular la derivada temporal de $\hat{u}_r$ obteniendo el resultado:

$$\dot{\hat{u}}_r(t) = \frac{d\hat{u}_r(t)}{dt} = \dot{\theta}(t) \left[-sen\theta(t)\,\hat{\imath} + cos\theta(t)\,\hat{\jmath} \right] , \tag{4}$$

esta expresión contiene dos factores. El primero ($\dot{\theta}$) proviene de la aplicación de la regla de la cadena para la diferenciacin de funciones compuestas, mientras que el segundo, a saber, el vector:

$$\hat{u}_\theta(t) \equiv \; -sen\theta(t)\,\hat{\imath} + cos\theta(t)\,\hat{\jmath} \tag{5}$$

es un nuevo con algunas propiedades bonitas, a saber

1. *al igual que su pariente $\hat{u}_r(t)$, es un vector unitario dependiente del tiempo.*
2. *$\hat{u}_\theta(t)$ es ortogonal al vector $\hat{u}_r(t)$*
3. *La orientación de $\hat{u}_\theta(t)$ es en el sentido en que aumenta el ángulo θ.*

La derivada temporal de $\hat{u}_\theta(t)$ está dada por

$$\frac{d\hat{u}_\theta(t)}{dt} = -\dot{\theta}(t) \left[cos\theta(t)\,\hat{\imath} + sen\theta(t)\,\hat{\jmath} \right] = -\dot{\theta}(t)\; \hat{u}_r(t) \tag{6}$$

Ahora bien[1], como $\hat{u}_r$ y $\hat{u}_\theta$ son vectores ortonormales constituyen una base del plano, de manera que todo vector $\vec{w}$ en el plano $x - y$ puede escribirse como combinación lineal de ambos vectoreas, es decir, en la forma

$$\vec{W} = W_r\,\hat{u}_r + W_\theta\,\hat{u}_\theta \tag{7}$$

2. Velocidad y Aceleración en Coordenadas Polares

2.1. Movimiento circular

Estamos interesados en encontrar expresiones para la velocidad y la aceleración de una partícula en movimiento circular. Para ello utilizaremos los vectores que acabamos de introducir y las relaciones entre ellos. Recordando que la posición de la partícula está dada por

$$\vec{r} = R\,\hat{u}_r \tag{8}$$

y diferenciando obtenemos:

$$\vec{v} = R\,\dot{u}_r = R\,\dot{\theta}\,\hat{u}_\theta \tag{9}$$

como bien sabemos, la velocidad es tangente a la trayectoria lo que queda claramente evidenciado en la fórmula que acabamos de encontrar, en que la velocidad es proporcional al vector $\hat{u}_\theta$ que efectivamente es tangente al

[1] de ahora en adelante y solo para simplificar las fórmulas no escribiremos explícitamente la dependencia en t

círculo de radio R. La cantidad $R\,\dot{\theta}$ no es otra cosa que la rapidez instantánea del movimiento circular y a veces es denominada *velocidad tangencial*.

Análogamente, derivando la velocidad ($\vec{v}$) se obtiene la siguiente expresión para la aceleración de un movimiento circular:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{v}}{dt} &= R\frac{d\dot{\theta}}{dt}\,\hat{u}_\theta + R\,\dot{\theta}\,\dot{\hat{u}}_\theta = \\ &= -R\,\dot{\theta}^2\,\hat{u}_r + R\,\ddot{\theta}\,\hat{u}_\theta \qquad (10)\end{aligned}$$

El primer término ($-R\dot{\theta}^2\hat{u}_r$) radial y con sentido hacia el centro de coordenadas, es denominado *aceleración centrípeta*, mientras que el segundo ($R\ddot{\theta}\,\hat{u}_\theta$) es conocido como aceleración tangencial.

Para dar una interpretación física a cada uno de estos términos consideremos la velocidad instantánea de una partícula en movimiento circular en dos instantes muy cercanos t y $t+\Delta t$, esto es, queremos comparar $\vec{v}(t)$ y $\vec{v}(t+\Delta t)$. En vista de que $\vec{a}$ es la aceleración instantánea y de que Δt es un intervalo temporal muy corto podemos poner

$$\begin{aligned}\vec{v}(t+\Delta t) &\approx \vec{v}(t) + \vec{a}(t)\,\Delta t = \\ &= \vec{v}(t) + \left(-R(\dot{\theta}(t))^2)\,\hat{u}_r(t) + R\ddot{\theta}(t)\,\hat{u}_\theta(t)\right)\,\Delta t = \\ &= R\left(\dot{\theta}(t) + \ddot{\theta}(t)\,\Delta t\right)\,\hat{u}_\theta(t) - R(\dot{\theta}(t))^2\,\Delta t\,\hat{u}_r(t) \qquad (11)\end{aligned}$$

en la última línea salta a la vista que la aceleración centrí peta es la componente de la aceleración responsable del cambio de dirección del vectro de velocidad instantánea.

Por otra parte, si calculamos la rapidez $v(t+\Delta t)$ encontramos:

$$v(t+\Delta t) \quad = \quad \sqrt{\vec{v}(t+\Delta t).\vec{v}(t+\Delta t)} \qquad (12)$$

al calcular el producto $S = \vec{v}(t+\Delta t).\vec{v}(t+\Delta t)$ resulta:

$$S = R^2\,\left(\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\ddot{\theta}\,\Delta t\right) + (ters)(\Delta t)^2 \qquad (13)$$

donde la expresión $(ters)(\Delta t)^2$ engloba a todos los términos con un factor Δt^2 que -por ser Δt un intervalo muy corto- es despreciables. En definitiva

$$S \approx R^2\left(\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\ddot{\theta}\,\Delta t\right) \qquad (14)$$

y de allí sigue que[2]

$$v(t+\Delta t) = R\dot{\theta}(t)\sqrt{1 + 2\frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\,\Delta t} \approx v(t)\,\left(1 + \frac{\ddot{\theta}\Delta t}{\dot{\theta}}\right) \qquad (15)$$

ó:

$$\frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{v(t)} \approx \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\,\Delta t \qquad (16)$$

fórmula en que se aprecia que los cambios en la rapidez provienen de la aceleración tangencial.

[2]si $0 \leq x << 1$ ocurre que $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}\,x$

2.2. El caso general

Consideremos ahora un movimiento general en el plano. Es claro que si se escoge un origen fijo, la posición de la partícula expresada en los sistemas de coordenadas cartesiano y polar será:

$$\vec{r} = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} = r\,\hat{u}_r \tag{17}$$

donde ahora debemos entender que el factor r (la magnitud del vector de posición de la partícula) es variable en general.

Usando las propiedades de la base polar podemos expresar la velocidad de la partícula en la forma

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{u}_r + r\dot{\theta}\,\hat{u}_\theta \tag{18}$$

el primer término en esta expresión es la velocidad radial, es decir, la rapidez con que varía la distancia entre la partícula y el origen de coordenadas.

Derivando una vez más y reordenando un poco los términos, encontramos que la aceleración en coordenadas polares está dada por:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{u}_\theta \tag{19}$$

Vale la pena observar que si el módulo del vector de posición es constante es decir si consideramos un movimiento circular $r(t) = R$ las fórmulas que acabamos de encontrar se reducen a las queencontramos en la subsección anterior.

3. Una Aplicación: El Péndulo

Vamos a dar un ejemplo sencillo de la aplicación de las coordenadas polares. Nuestro objetivo es estudiar las *ecuaciones de movimiento* de un péndulo.

Un péndulo simple no es otra cosa que una masa suspendida de un techo por un cable ideal y que realiza un movimiento en un plano.

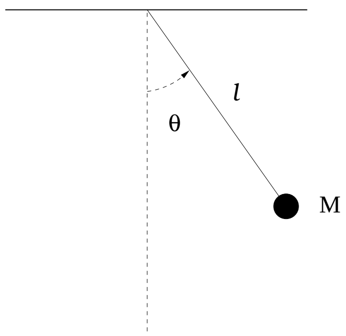

Figura 2: El Péndulo. Observe que ya hemos escogido el sentido en que mediremos el ángulo θ.

Es claro que las únicas fuerzas que actúan sobre el péndulo son el peso y la fuerza ejercida por el cable, de manera que la segunda ley de Newton para este sistema es senci9llamente:

$$\vec{T} + \vec{w} = M\vec{a} \tag{20}$$

Para atacar el problema debemos expresar la tensión, el peso y la aceleración como combinaciones lineales de una base del plano del movimiento. Con este fin escogemos el origen de coordenadas en el punto de suspensión del péndulo y utilizamos coordenadas polares. La tensión está dirigida a lo largo del cable de suspensión, y

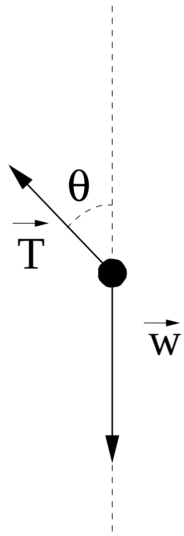

Figura 3: El diagrama de cuerpo libre para M

en consecuencia es radial, por lo tanto: $\vec{T} = T\,\hat{u}_r$ donde T es una incógnita del problema. El peso se puede descomponer en la base polar sin mayor problema y se obtiene:

$$\vec{w} = M\,g\ (cos\theta\,\hat{u}_r - sen\theta\,\hat{u}_\theta) \tag{21}$$

Por otra parte, si usamos el argumento de que la cuerda es inextensible podemos asegurar que el movimiento de la masa es a lo largo de un arco de círculo de radio ℓ, de manera que su aceleración está dada por la fórmula

$$\vec{a} = -\ell\dot{\theta}^2\,\hat{u}_r + \ell\ddot{\theta}\,\hat{u}_\theta \tag{22}$$

En definitiva, en la base polar la segunda ley de Newton para M se expresa como:

$$(T + M\,g\,cos\theta\,)\,\hat{u}_r - sen\theta\,\hat{u}_\theta = -\ell\dot{\theta}^2\,\hat{u}_r + \ell\ddot{\theta}\,\hat{u}_\theta \tag{23}$$

de donde siguen inmediatamente las *ecuaciones de movimiento*

$$T + g\,cos\theta = -M\ell\dot{\theta}^2 \tag{24}$$

$$-M\,g\,sen\theta = M\ell\ddot{\theta} \tag{25}$$

que se pueden reescribir en la forma:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\,sen\theta \tag{26}$$

$$T = -\left(g cos\theta + M\ell\dot{\theta}^2\right) \tag{27}$$

Nota Importante: recuerde que estas notas no constituyen una biblia ni nada por el estilo, siempre debe leer otra bibliografía