Gravitación

Mario I. Caicedo

Departamento de Física, Universidad Simón Bolívar

Índice

1. Introducción

Antes de entrar en discusión quiero destacar que estas notas no son más que un complemento al material que usted debe estudiar en la bibliografía recomendados para este curso [1, 2, 3].

Durante el desarrollo de este curso supondremos un conocimiento básico de las leyes de la mecánica del punto, en particular, debemos entender que la segunda ley de Newton

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} \tag{1}$$

puede verse de dos maneras, en primer lugar leyéndola de derecha a izquierda, la segunda ley de Newton expresa que si se conoce la fuerza neta que actúa sobre una partícula y las condiciones iniciales $\vec{r}(t = 0)$, $\vec{p}(0)$ es posible conocer la posición de la partícula para cualquier instante posterior, así, por ejemplo, si una partícula de masa m semueve a lo largo de un segmento recto bajo la acción de una fuerza restitutiva de magnitud proporcional a la distancia a un cierto punto, el movimiento de la partícula será una oscilación armónica simple alrededor de dicho punto (posición de equilibrio).

La lectura de la igualdad (1) de izquierda a derecha nos dice otra cosa, a saber, que si conocemos la *ley horaria* $\vec{r}(t)$ de una partícula, esto es, su posición como función del tiempo, seremos capaces de estudiar la causa que provoca el movimiento (la fuerza $\vec{F}$)

La astronomía y la física relacionada con ella son temas que siempre despiertan interés. Le recomiendo la referencia [4] como una excelente lectura de algunos aspectos históricos.

2. La Ley de Gravitación Universal

Uno de los descubrimientos científicos más notables de la historia es el de la *Ley de Gravitación Universal*. Isaac Newton (1643-1727) propuso que entre cualesquiera dos masas -sin importar su composición, de allí el calificativo de *universal*- se establece una fuerza atractiva y encontró una expresión para dicha fuerza.

Utilizando sus leyes de movimiento, Newton fué capaz de demostrar que la fuerza de gravedad sigue la *ley del inverso de los cuadrados*. La teoría gravitacional de Newton nos permite estudiar los movimientos celestes. Esta la teoría de gravitación fue sustituida en el primer cuarto del siglo XX por la teoría de gravitación de Einstein (la relatividad general), que en muchos casos se puede aproximar razonablemente por la teoría de Newton.

2.1. Interacción entre dos masa puntuales

En términos modernos la ley de Gravitación Universal establece que:

Entre dos partículas puntuales cualesquiera de masas m_1 *y* m_2 *separadas por una distancia* r *se establece una fuerza de atracción dirigida a lo largo de la línea que une a las partículas y* *cuya magnitud está dada por*

$$F = G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2} \tag{2}$$

donde G es una constante

La constante G, denominada constante de gravitación de Newton, debe determinarse experimentalmente y en el sistema internacional de unidades tiene el valor [5]:

$$G = (6{,}6726 \pm 0{,}0088) \times 10^{-11} \quad \frac{N \times m^2}{Kg^2}\,. \tag{3}$$

Para reescribir la ley de gravitación universal en términos de una *fórmula* designemos por $\hat{u}_{1\,2}$ al vector radial unitario que apunta de m_1 a m_2, en ese caso, la atracción gravitacional que m_1 ejerce sobre m_2 está dada por el vector

$$\vec{F}_{m_1\,m_2} = -G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2}\,\hat{u}_{1\,2} \tag{4}$$

2.2. Principio de Superposición

Una de las propiedades más notables de la fuerza gravitacional de Newton es que es <u>aditiva</u>, es decir, que si queremos calcular la fuerza gravitacional que un conjunto de N masas puntuales $m_1, m_2 \ldots, m_N$ ejerce sobre una masa puntual de prueba m solo hay que calcular la suma

$$\vec{F} = -\sum_{i=1}^{N}\,G\frac{m\,m_i}{r_{m\,i}^2}\,\hat{u}_{i\,m} \tag{5}$$

donde ahora los vectores $\hat{u}_{i\,m}$ son los vectores radiales unitarios que apuntan de la $i-$ésima masa del conjunto hasta la masa de prueba[1]

[1] otra manera de expresar la fórmula (5) se desprende de observar que los versores $\hat{u}_{m\,i}$ pueden representarse como

$$\hat{u}_{i\,m} = \frac{1}{r_{i\,m}^3}\,\vec{r}_{i\,m}$$

Ejemplo 1 *Esta breve presentación nos ha dotado de suficientes elementos como para estudiar algunas situaciones sencillas. Consideremos un conjunto de cuatro masas puntuales localizadas en los vértices de un cuadrado de lado L. Queremos calcular la atracción gravitacional ($\vec{F}$) que esta distribución de masas ejerce sobre una partícula de prueba colocada en el centro geométrico del cuadrado.*

En lugar de llevar adelante un cálculo detallado (queda como un ejercicio sencillo de álgebra vectorial para el lector que debe resolverse como requisito para atacar la resolución del problema 1) daremos un argumento muy sencillo que demuestra que la fuerza es nula. El argumento consiste en observar en que podemos agrupar las masas idénticas en dos pares de masas localizadas en los pares de vértices opuestos del cuadrado. Cada una de las masas de cada par atrae a la partícula hacia su posición con una fuerza de idéntica magnitud, de manera que las fuerzas gravitacionales se cancelan a pares dando ua resultante total nula.

3. Energía Potencial Gravitacional

Nota al lector: *Si usted ya estudió las notas que corresponden al estudio del movimiento bajo la acción de fuerzas centrales puede saltar directamente a la fórmula (10) y al texto que le sigue.*

No es dificil convencerse de que la fuerza de gravedad ejercida por una masa puntual es

---

donde los vectores $\vec{r}_{i\,m}$ son los vectores de posición relativa de la partícula de masa m con respecto a cada una de las m_i y $r_{i\,m}^3 = ||\vec{r}_{i\,m}||^3$, lo que lleva a expresar el principio de superposición como

$$\vec{F} = -\sum_{i=1}^{N} G\frac{i\,m}{r_{i\,m}^3}\,\vec{r}_{i\,m}$$

conservativa[2]. Con este objetivo recordemos que el trabajo realizado por una fuerza para llevar a una partícula entre los puntos A y B de una trayectoria $\mathcal{C}$ se calcula como sigue

$$W = \int_{A\ \mathcal{C}}^{B} \vec{F}.d\vec{r}\,, \tag{6}$$

ahora bien, si colocamos un centro de coordenadas en la masa gravitante (la fuente), el diferencial de trayectoria más general posible de una partícula de prueba estará dado por

$$d\vec{r} = dr\hat{u}_r + d\vec{r}_\perp\,, \tag{7}$$

donde $d\vec{r}_\perp$ es un elemento de trayectoria ortogonal a la dirección radial construida a partir de la fuente. Utilizando la ley de gravitación universal resulta

$$\vec{F}.d\vec{r} = -G\frac{M\,m}{r^2}\,dr\,, \tag{8}$$

de acuerdo a este resultado, los puntos A y B de la trayectoria $\mathcal{C}$ quedan identificados por sus respectivas distancias al origen de coordenadas (r_A, y r_B) de manera que el cálculo del trabajo queda reducido al cálculo de la siguiente integral ordinaria

$$W = -G\int_{r_A}^{r_B}\frac{M\,m}{r^2}\,dr\,, \tag{9}$$

y en esta expresión todo rastro de la trayectoria ha desaparecido, en definitiva, hemos demostrado que efectivamente la fuerza es conservativa. En consecuencia, existe una energía potencial asociada a la fuerza central dada por la integral

$$U(P) = -\int_{arb}^{P}\vec{F}.d\vec{r} = -G\int_{r_{arb}}^{r_P}\frac{M\,m}{r^2}\,dr\,, \tag{10}$$

[2]el argumento que discutiremos acá se generaliza para cualquier fuerza de la forma $\vec{F} = F(r)\,\hat{u}_r$ esto es, para cualquier fuerza central

donde P es el punto en que queremos calcular la energía potencial, y arb es un punto arbitrario. Usualmente se toma el punto de referencia como el infinito ($r_{arb} = \infty$) y con ello se obtiene la siguiente expresión final para la energía potencial gravitacional asociado a la interacción de dos masas puntuales M y m

$$U(r) = -G\,\frac{M\,m}{r} \tag{11}$$

A partir de esta expresión la fuerza gravitacional sobre la partícula de prueba se calcula como:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U = -\frac{\partial U}{\partial r}\,\hat{u}_r = -\frac{d\,U}{d\,r}\,\hat{u}_r \tag{12}$$

Es claro que el principio de superposición implica que la fuerza gravitacional que un sistema de N masas gravitantes ejerce sobre una masa de prueba también es conservativa y que en ese caso la energía potencial gravitacional entre el sistema gravitante y la masa de prueba es

$$U(r) = -G\sum_{i=1}^{N}\frac{m\,M_i}{r_i} \tag{13}$$

donde m es la masa de prueba, las M_i's son las masas de las partículas que constituyen el sistema gravitante y las cantidades r_i son las distancias que separan a estas de la masa de prueba.

Si recordamos la definición de la energía potencial podemos interpretar a la energia potencial gravitacional (U) como trabajo que hay que efectuar en contra de la gravedad para traer una partícula de masa m a velocidad constante desde el infinito hasta una distancia r de M.

4. Distribuciones de Materia

Probablemente uno de los resultados más notables (de hecho el que permite usar la fórmula de Newton para estudiar el movimiento de objetos celestes) de la teoría de gravitación de Newton consiste en demostrar que para cualquier partícula de prueba de masa m colocada en la región del espacio exterior a una distribución[3] de materia esférica de radio R y masa M, la atracción gravitacional que la esfera ejerce sobre la partícula es idéntica a la que una partícula de masa M colocada en su centro de la esfera ejercería sobre la masa de prueba, esto es:

$$\vec{F} = -G\,\frac{M\,m}{r^2}\,\hat{u}_r \tag{14}$$

donde $r > R$ es la distancia entre el centro del cuerpo esférico y la masa de prueba y $\hat{u}_r$ el vector unitario que apunta radialmente del centro de la esfera hacia la masa de prueba.

Expresado en otros términos: *la atración gravitacional que una distribución de masa con simetría esférica ejerce sobre una partícula puntual colocada en la región exterior a la distribución de masa es igual a la que ejercería una partícula puntual cuya masa fuera la misma de la de la distribución y colocada en el centro de esta.*

Este resultado puede generalizarse aun más para probar que la fuerza gravitacional entre dos distribuciones esféricas de materia es la misma que entre dos partículas puntuales. Esta es la clave de la aplicación de la ley de gravitación universal de Newton al estudio de las órbitas planetarias.

En particular, puede demostrarse que (usted deberá memorizar este resultado), para una esfera solida de radio R cuya masa (M) se distribuye uniformemente la atracción gravitacional

[3] es decir, un cuerpo extendido

sobre una masa (puntual) de prueba m localizada a una distancia r del centro de la esfera está dada por[4]

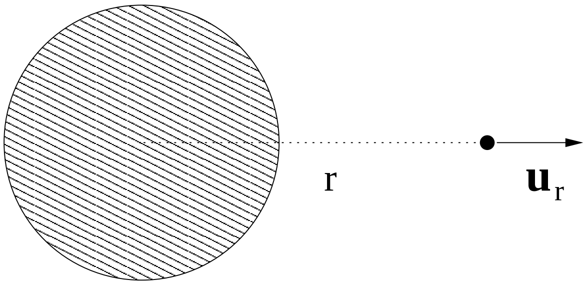

Figura 1: Una esfera sólida homogénea de radio R ejerce atracción gravitacional sobre una masa de prueba. El vector unitario $\hat{u}_r$ se muestra en negritas ($\mathbf{u}_r$).

$$\vec{F} = \begin{cases} -\kappa\, m\, r\, \hat{u}_r & \text{si } r < R \\ -G\, m\, \frac{M}{r^2}\, \hat{u}_r & \text{si } r > R \end{cases}, \tag{15}$$

donde $\hat{u}_r$ es el vector radial unitario usual y

$$\kappa = G\frac{M}{R^3}. \tag{16}$$

Se puede demostrar que -si utilizamos el punto en el infinito como referencia de la energía potencial- la energía potencial de la que se deriva esta fuerza es

$$U = \begin{cases} \kappa\, m\, r^2/2 - \frac{3}{2}G\frac{m\,M}{R} & \text{si } r < R \\ \\ -G\, m\, \frac{M}{r} & \text{si } r > R \end{cases}, \tag{17}$$

[4]no demostraremos este resultado en este curso ya que el cálculo es engorroso y escencialmente idéntico al cálculo de la fuerza electrostática entre una esfera electricamente cargada y una carga de prueba puntual, problema que se estudiará en el siguiente curso de física

4.1. Densidad de masa

Material	**Densidad** (gr/cc)
Alcohol etílico	0.79
Hielo	0.917
Aceite de oliva	0.92
Agua	1.00
Aleaciones de acero	7.6-8.9
Mercurio	13.6
Iridio	22.4

Cuadro 1: Con el fin de dar una idea de los órdenes de magnitud, acá tiene una tabla de densidades para algunas sustancias

Para poder calcular la tracción gravitacional ejercida por cuerpos extendidos es necesario introducir una noción nueva. La forma en que se distribuye la masa de un cuerpo se describe a través de una cantidad denominada *densidad de masa*. Si un cuerpo es uniforme (está constituido de un solo material, se dice que es hoogéneo, y su densidad[5] ρ resulta ser una constante dada por: $\rho = M/V$ donde M es la masa del cuerpo y V su volumen. Cuando el cuerpo no es homogéneo las cosas se complican un poco y es necesario recurrir a la noción de límite para definir la densidad de un elemento muy pequeño del cuerpo como:

$$\rho = \lim_{dV_{gen} \to 0} \frac{dm}{dV_{gen}} \,. \tag{18}$$

[5]a veces -cuando aparezca alguna confusión posible con el uso que se esté dando a la la letra griega ρ, utilizaré la letra D para designar a la densidad

Donde dm es la masa del pequeño elemento de volumen y $d\,V_{gen}$ es el volumen generalizado infinitesimal del cuerpo (un elemento de longitud si el cuerpo es un filamento infinitamente delgado, un área si el cuerpo es una superficie sin espesor y claro, un volumen tridimensional estándar si el cuerpo es algo menos exótico).

Utilizando la definición de densidad, podemos utilizar nuestros conocimientos básicos de cálculo para imaginar a un cuerpo extendido como una colección infinita de elementos de masa $d\,m$ y masa total:

$$M = \int_{cuerpo} dm = \int_{cuerpo} \rho\; d\,V_{gen} \tag{19}$$

4.2. Fuerza gravitacional entre una masa de prueba y una distribución de materia

La discusión acerca de las distribuciones de materia combinada con el principio de superposición nos permite entender la manera de calcular la interacción gravitacional entre un cuerpo de masa M y una masa de prueba. La idea es sencilla, basta con imaginarnos al cuerpo como compuesto por un enorme número de elementos de volumen infinitesimales de masa $d\,M = \rho\, dV_{gen}$. Cada elemento de masa ejerce una atracción gravitacional sobre la masa de prueba dada por

$$d\vec{F} = -G\,\frac{m\,dM}{r^2}\,\hat{u}_r \tag{20}$$

donde $\hat{u}_r$ es el vector radial unitario que apunta del elemento de masa hacia la masa de prueba.

El principio de superposición implica que la fuerza de atracción neta que el cuerpo ejerce sobre la masa de prueba debe expresarse como una suma, que por supuesto va a corresponder

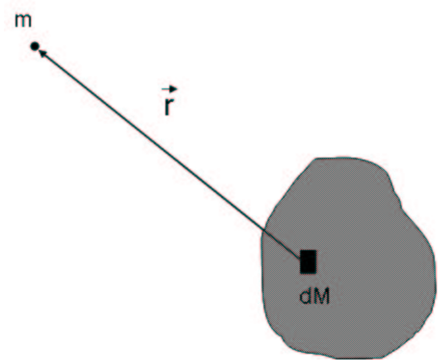

Figura 2: Geometría para el cálculo de la atracción gravitacional que un cuerpo finito ejerce sobre una masa puntual.

a una integración sobre todos los elementos de masa, de manera que

$$\vec{F} = -G\, m \int \frac{dM}{r^2}\, \hat{u}_r = -G\, m \int \frac{\rho\, dV_{gen}}{r^2}\, \hat{u}_r \tag{21}$$

Para calcular la energía potencial gravitacional asociada ala fuerza que el cuerpo masivo ejerce sobre la partícula de prueba debemos calcular el resultado de la expresión

$$U = -\int_{\infty}^{r} \vec{F}.d\vec{r} = -\int \left[G\, m \int \frac{\rho\, dV_{gen}}{r^2}\, \hat{u}_r \right] .d\vec{r}\,. \tag{22}$$

Esta fórmula es ciertamente aparatosa pero puede interpretarse muy facilmente para permitirnos llegar a un resultado. Basta con notar que el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ es exactamente igual a la suma de los trabajos por cada uno de los elementos infiitesimales de fuerza $d\vec{F}$. Cada uno de estos trabajos infinitesimales lleva a un trabajo elemental

$$d\,W = \int_{\infty}^{r} d\vec{F}.d\vec{r} = \int_{\infty}^{r} \left[G\, m\, \frac{\rho\, dV_{gen}}{r^2}\, \hat{u}_r \right] .d\vec{r} = -G\, m\, \frac{\rho\, dV_{gen}}{r}\,. \tag{23}$$

Al recordar que $U = -W$ obtenemos sin problema que la energ—́ii a potencial gravitacional asociada a la interacción entre la masa de prueba y cada elemento de volumen es

$$d\,U = -G\,m\,\frac{\rho\,dV_{gen}}{r}\,, \tag{24}$$

de manera que la energía potencial que debemos asociar a la interacción entre la masa de prueba y el sistema gravitante es

$$U = -G\,m\,\int_V \frac{\rho\,dV_{gen}}{r} \tag{25}$$

5. Ejemplos

Ejemplo 2 *Con el fin de dar una idea del tipo de análisis envuelto en el estudio de la atracción gravitacional ejercida por cuerpos extendidos consideremos el cálculo de la atracción gravitacional que una barrita uniforme infinitamente delgada de longitud L (esto es, un segmento) y masa M ejerce sobre una masa puntual m (masa de prueba) localizada sobre la recta definida por el segmento a una distancia D de uno de los extremos.*

Figura 3: Una barra muy delgada de longitud L ejerce atracción gravitacional sobre una masa de prueba. Las distancias se miden desde el extremo izquierdo de la barra.

Con el propósito de llevar adelante el cálculo utilizaremos un sistema de coordenadas definido por un vector unitario ($\hat{\imath}$) paralelo al segmento y que apunta de este a m. Como el cuerpo es unidimensional, la densidad apropiada -que designaremos como λ- se denomina[6]*: densidad lineal*

[6]cuando halla posibilidad de confusión utilizaremos D_{lin} en lugar de la letra griega λ

de masa, y en vista de lo que aprendimos en la sección anterior pondremos:

$$\lambda = \frac{M}{L} \tag{26}$$

La base del cálculo consiste en echar mano del principio de superposicion para calcular la atracción gravitacional como la suma de las fuerzas gravitacionales ejercidas por cada uno de los elementos de masa. Cada elemento infinitesimal de masa $d\,M$ *ejerce una fuerza gravitacional infinitesimal dada por*

$$d\vec{F} = -G\,\frac{m\,dM}{s^2}\,\hat{\imath}\,, \tag{27}$$

donde $s = x + D$ *es la distancia entre el elemento de masa y la partícula de prueba.*

De acuerdo a la fórmula anteriro, y al principio de superposición la fuerza neta sencilamente es la suma de la atracción gravitacional ejercida por cada elemento de masa del cuerpo, esto es:

$$\vec{F} = \sum d\vec{F} = \int_{filamento} d\vec{F}\,. \tag{28}$$

Ahora bien, la masa de cada elemento está dada por $d\,M = \lambda\,d\,x$ *donde* $d\,x$ *es un elemento infinitesimal de longitud a lo largo de la barrita, definiendo* $x = 0$ *como la coordenada del extremo de la barrita más alejada de la partícula de prueba y recordando que* λ *es constante, queda:*

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -G\,m\,\lambda \int_0^L \frac{dx}{(x+D)^2}\,\hat{\imath} = \\ &= -G\,m\,\frac{M}{L}\left[\frac{1}{D} - \frac{1}{L+D}\right]\hat{\imath} \end{aligned} \tag{29}$$

un poquitin más de manipulación nos permite poner esto en la forma (ejercicio)

$$\vec{F} = -G\,\frac{m\,M}{s^2}\,\hat{\imath} \tag{30}$$

donde $s = \sqrt{D(L+D)}$, esta última fórmula para la fuerza gravit. es la misma que la fórmula correspondiente a la atraccion entre dos partículas puntuales de masa M y m separadas por una distancia s, de manera que la barrita ha sido sustituida por una partícula puntual efectiva colocada a distancia s de la masa de prueba.

Alguien podria haber dicho que la sustitución del cuerpo extendido por una masa puntual resultaba esperable, e inclusive podría haberse atrevido a conjeturar que la posición de la particula efectiva deberia haber coincidido con el centro geométrico del cuerpo extendido (en este caso la barrita), sin embargo este último no es el caso[7]*, en efecto, la distancia entre la masa de prueba y el punto central de la barra es $D + L/2$ ($= \langle\, L + D, D\,\rangle_{arim} = [(L+D)+D]/2$, que no es otra cosa que la media aritmética de las distancias entre la masa de prueba y ambos extremos de la barra), mientras que $s = \langle\, D, L\,\rangle_{geometric}$ es la media geométrica de las distancias entre la masa de prueba y ambos extremos de la barra*[8]*, cantidad que en general no coincide con la media aritmética.*

Ejemplo 3 *Una partícula de prueba está localizada en el centro de un semianillo infinitamente delgado de radio R masa M distribuida uniformemente. ¿Cuál será la atracción gravitacional que el anillo ejerce sobre la partícula de prueba?*

*Para estudiar este problema comencemos por colocar un sistema de coordenadas polares cuyo origen coincida con la partícula de prueba (***usted debe hacer todos los gráficos necesarios**

[7] más adelante veremos que el centro geométrico de la barrita tiene un significado físico de interés: un punto denominado el centro de masa de la barra

[8] la media geométrica de un conjunto de p números x_1, x_2, …, x_p se define como $\langle\, x_1, x_2, \ldots, x_p\,\rangle_{geometric} \equiv (x_1 \times x_2 \ldots \times x_p)^{1/p}$

para entender este ejemplo). *De esta manera, el vector de fuerza gravitacional ejercido por un elemento infinitesimal de semianillo es*

$$d\,\vec{F} = dF\,\hat{u}_r \tag{31}$$

donde dF *es la componente radial de la fuerza y* $\hat{u}_r$ *es el vector polar usual. Claramente*

$$d\,F = \frac{G\,m\,dm}{R^2} = \frac{G\,m\,\lambda}{R^2}\,R\,d\phi \tag{32}$$

donde -debido a que la masa está distribuida uniformemente- $\lambda = \frac{M}{\pi\,R}$. *al sustituir* $\hat{u}_r$ *resulta*

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \frac{G\,m\,\lambda}{R^2}\left\{\int_0^{\pi}\left(cos\phi\,\hat{\imath} + sen\phi\,\hat{\jmath}\right)\,R\,d\phi\right\} \\
&= \frac{G\,m\,\lambda}{R^2}\,R\left\{\hat{\imath}\int_0^{\pi}\,d\phi\,cos\phi + \hat{\jmath}\,\int_0^{\pi}\,sen\phi\,d\phi\right\} \\
&= 2\,R\,\frac{G\,m\,\lambda}{R^2}\,\hat{\jmath} = \frac{2\,m\,M}{\pi\,R^2}\,\hat{\jmath}\,.
\end{aligned} \tag{33}$$

Es interesante observar que la componente horizontal de la fuerza gravitacional ha desaparecido, esto se debe a la simetría del objeto que genera la fuerza, en efecto, por cada diferencial de masa que ejerce un elemento de fuerza, hay un diferencial de masa -de la misma masa- que se encuentra situado en una posición simétrica con respecto al eje y del primero, de manera que las componentes horizontales de las fuerzas gravitacionales que ambos elementos de masa ejercen sobre la masa de prueba se cancelan.

Ejemplo 4 *Considere un sistema gravitante constituido por disco plano homogéneo de masa M y radio R. Encuentre la energía potencial gravitacional de interacción entre dicho objeto y una partícula de prueba que se desplaza a lo largo del eje del anillo.*

Vamos a levar a cabo el cálculo por dos métodos diferentes. El primero (el método más doloroso) consistirá en encontrar la fuerza de interaccion gravitacional para luego calcular la

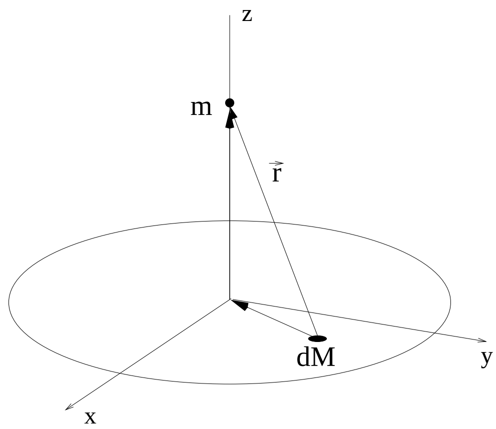

Figura 4: La geometría del problema: m y dM son la masa de prueba y un elemento diferencial de masa.

energía potencial. El segundo método -mucho más sencillo- utilizará directamente los resultados que hemos presentado durante las discusiones teóricas de las secciones anteriores.

En ambos casos, vamos a utilizar coordenadas "cilíndricas". Estas coordenadas son realmente sencillas. Consisten en utilizar coordenadas polares para todos los planos paralelos al plano $x - y$ *y una altura* z *para diferenciar entre estos planos de manera que cada punto del espacio se localiza con: su distancia* (ρ) *al eje* z*, un ángulo* (ϕ) *que típicamente se mide con respecto al eje* x*, y la altura* z*. De acuerdo con estas coordenadas y con la geometría del problema, el vector de posición del elemento de masa es* $\vec{r}_{dM} = \rho\,\hat{u}_\rho$*, mientras que la masa de prueba está localizada en* $\vec{r}_m = z\hat{k}$*.*

Para entrar en materia recuerde el principio de superposición (lo hemos usado en los ejemplos anteriores) que nos permite expresar la fuerza gravitacoinal que un elemento infinitesimal *de masa ejerce sobre la partícula de prueba como:*

$$d\vec{F} = -G\frac{m\,dM}{r^3}\,\vec{r} \tag{34}$$

donde $\vec{r}$ es el vector de posición de la partícula con respecto al elemento de masa (dM),

$$\vec{r} = -\rho\,\hat{u}_\rho + z\hat{k}\,, \tag{35}$$

y r su magnitud que se calcula trivialmente con la definición:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\vec{r}.\vec{r}} = \sqrt{\left(-\rho\,\hat{u}_\rho + z\hat{k}\right).\left(-\rho\,\hat{u}_\rho + z\hat{k}\right)} = && (36)\\ &= \sqrt{z^2+\rho^2} && (37)\end{aligned}$$

en resumen,

$$d\vec{F} = -G\,m\,dM\;\frac{z\hat{k}-\rho\,\hat{u}_\rho}{\left(z^2+\rho^2\right)^{3/2}} = -G\,m\;\frac{(z\hat{k}-\rho\,\hat{u}_\rho)\,\sigma\,dA}{\left(z^2+\rho^2\right)^{3/2}}\,, \tag{38}$$

donde hemos usado que el elemento de masa es $dM = \sigma\,dA$ siendo σ la densidad superficial de masa del disco, y dA el área del elemento de masa.

Aun nos falta un detalle. El cálculo del elemento de área que aparece en la expresión para dA. Para ver como se hace recordemos que en el plano del disco las coordenadas cilídricas no son otra cosa que coordenadas polares (en que ponemos ρ en lugar de r y ϕ en lugar de θ. La expresión de la velocidad en coordenadas polares (en la notación que habíamos estado usando hasta este capítulo) es $\vec{v} = \dot{r}\,\hat{u}_r + r\dot{\theta}\,\hat{u}_\theta$. De acá sigue de inmediato que un desplazamiento infinitesimal descrito en coordenadas polares se expresa como $d\vec{r} = dr\,\hat{u}_r + rd\theta\,\hat{u}_\theta$. Los dos vectores infinitesimales $dr\hat{u}_r$ y $rd\theta\,\hat{u}_\theta$ forman el rectangulito curvo que se ve en la figura adjunta cuya área infinitesimal es $dA = |dr\hat{u}_r \times rd\theta\,\hat{u}_\theta| = rd\theta\,dr$.

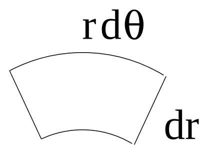

Figura 5: Un rectangulito infinitesimal de lados dr y $rd\theta$ forma el elemento diferencial de área ($dA = rd\theta\, dr$) natural para las coordenadas polares.

Al expresar el diferencial de área del elemento de masa en coordenadas cilíndricas ($dA = \rho\, d\rho\, d\phi$) para sustituirlo de vuelta en la fórmula (38) queda

$$d\,\vec{F} = -G\,m\,\frac{(z\hat{k} - \rho\,\hat{u}_\rho)\,\sigma\,\rho\,d\,\rho\,d\,\phi}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}\,, \tag{39}$$

y por lo tanto

$$\vec{F} = -G\,\sigma\,m\,\int_0^{2\,\pi}\int_0^R \frac{(z\hat{k} - \rho\,\hat{u}_\rho)\,\rho\,d\,\rho\,d\,\phi}{(z^2+\rho^2)^{3/2}} \tag{40}$$

Ahora bien, para poder comparar esta manera de hacer las cosas con lo que usted encontrará en cualquiera de los libros de física básicos (Resnick, Sears, etc) observe lo siguiente, si llamamos θ al ángulo que el vector $\vec{r}$ forma con el eje z resulta que

$$cos\theta = \frac{z}{(z^2+\rho^2)^{3/2}} \tag{41}$$

$$sen\theta = \frac{\rho}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}\,, \tag{42}$$

y recuerde que, $\hat{u}_\rho = cos\phi\,\hat{\imath} + sen\phi\,\hat{\jmath}$. Esta última fórmula nos permite ver con claridad que, en vista de que la integración en ϕ es en un período completo, la integral que contiene al $\hat{u}_\rho$ desaparece trivialmente dejándonos con:

$$\vec{F} = F_z\,\hat{k} \tag{43}$$

donde (luego de integrar en ϕ para obtener un factor de 2π:

$$F_z = -2\,\pi\,G\,\sigma\,m\,z\,\int_0^R \frac{\rho\,d\,\rho}{(z^2+\rho^2)^{3/2}} \tag{44}$$

que es la fórmula básica que usted va a encontrar en la literatura.

Ahora bien, ¿cómo es la cosa?. En la literatura usual se argumenta que se va a considerar un anillo plano infinitamente delgado de radio interno ρ; debido a la simetría del problema, la única contribución a la fuerza neta va a venir de la componente vertical de la fuerza que un elemento de masa $d\,M$ ejerce sobre la partícula de prueba, y la componente vertical de la fuerza infinitesimal es:

$$d\,F_z = -d\,F_G\,cos\theta \tag{45}$$

donde, claro: $d\,F_G = G\,m\,d\,M/r^2$ y $r = \sqrt{\rho^2+z^2}$ y $cos\theta = z/r$. Adicionalmente, la masa del anillo es $d\,M = \sigma \times$ longitud ancho $= \sigma \times (2\,\pi\,\rho)\,d\,\rho$. Al sustituir estas cantidades en la fórmula (45) e integrar en ρ entre 0 y R recuperamos el resultado "doloroso" (44).

La formulación dolorosa nos ha permitido exhibir explícitamente la cancelación de las componentes de la fuerza ortogonales al eje z, no pretendemos decir que la técnica "larga" sea mejor, solo queremos mostrar de manera explícita todo lo que se esconde detrás del argumento de simetría y como cada uno de los resultados usuales de la literatura se pueden obtener por fuerza bruta.

Al sustituir $\sigma = M/A = M/(\pi\,R^2)$ e integrar (43) obtenemos finalmente:

$$\vec{F} = 2\,G\,m\,\frac{M}{R^2}\left[\frac{z}{\sqrt{z^2+R}} - \frac{z}{\sqrt{z^2}}\right]\hat{k}\,. \tag{46}$$

Observe que como (para $z > 0$) el primer término de la expresión encerrada por los corchetes es menor que el segundo la expresión completa es negativa, y que por lo tanto la fuerza es atractiva *como era de esperarse. Hay que tener un poquito de cuidado con la fracción* $z/\sqrt{z^2}$ *en un ataque de inocencia podemos estar tentados a decir que el valor de dicho cociente es* 1, *sin embargo eso es falso ya que* $\sqrt{z^2} = |z|$ *y por lo tanto* $z/\sqrt{z^2} = sign(z)$ *así que la expresión final para la fuerza es:*

$$\vec{F} = 2\,G\,m\,\frac{M}{R^2}\,\left[\frac{z}{\sqrt{z^2+R}} - sign(z)\right]\,\hat{k}\,. \tag{47}$$

A partir de esta expresión podemos calcular el trabajo que se hace en contra de la gravedad al mover a la partícula de prueba entre dos posiciones localizadas a lo largo del eje del disco en posiciones z_1 *y* z_2,

$$W = -\int \vec{F}.d\vec{r} = -2\,G\,m\,\frac{M}{R^2}\int_{z_1}^{z_2}\left[\frac{z}{\sqrt{z^2+R}} - sign(z)\right]\,\hat{k}.\,dz\,\hat{k}\,. \tag{48}$$

Recordando que si escojo la posición inicial en forma arbitraria esto no es más que la energía potencial gravitacional y tomando $z_1 = 0$ *queda:*

$$U = -2\,G\,m\,\frac{M}{R^2}\,\left[\sqrt{z^2+R} - |z|\right] \tag{49}$$

Repitamos el mismo cálculo tomando el mejor atajo posible. Para ello comencemos por recordar que la energía potencial gravitacional de un sistema gravitante en interacción con una partícula de prueba es

$$U(r) = -G\sum_{i=1}^{N}\frac{m\,M_i}{r_i}\,, \tag{50}$$

lo que implica obviamente que si el sistema es contínuo debemos poner (recuerde la fórmla 25):

$$U = -G\,m\int\frac{dM}{r}\,. \tag{51}$$

De acuerdo con esto, para calcular lo que queremos nos basta con calcular la energía potencial de interacción entre la masa de prueba y un elemento diferencial de masa del disco, esto es:

$$d\,U = -G\frac{m\,dM}{r} \tag{52}$$

donde, en el cálculo anterior habíamos encontrado cada uno de los elementos que debíamos usar en esta fórmula, a saber: $dM = \sigma\,\rho\,d\rho\,d\phi$ *y*

$$r = ||\rho\,\hat{u}_\rho - z\,\hat{k}|| = \sqrt{z^2+\rho^2}\,. \tag{53}$$

Al sustituir queda

$$d\,U = -G\,m\,\sigma\,\frac{\rho\,d\rho\,d\phi}{\sqrt{z^2+\rho^2}}\,, \tag{54}$$

de manera que al integrar con los límites apropiados se obtiene el resultado parcial:

$$U = -G\,m\,\sigma\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\rho\,d\rho\,d\phi}{\sqrt{z^2+\rho^2}} = -2\,\pi\,G\,m\,\sigma\int_0^R \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{z^2+\rho^2}} \tag{55}$$

esto es:

$$U = -2\pi\,G\,m\,\sigma\left[\sqrt{z^2+R^2}-|z|\right] \tag{56}$$

$$= -\frac{2\,G\,m\,M}{R^2}\left[\sqrt{z^2+R^2}-|z|\right] \tag{57}$$

Ejemplo 5 *Considere el sistema gravitante del ejemplo anterior. Considere una partícula de prueba se encuentra a una altura* h_0 *sobre el plano del anillo viajando hacia este a lo largo del eje con rapidez inicial* v_0. *¿Cuál será la energía cinética de la partícula de prueba cuando alcance una nueva distancia* h *del plano del anillo?*

Como, según el teorema de conservación de la energía, el cambio de energía cinética de la masa de prueba es igual al cambio en su energía potencial obtenemos que

$$\Delta T = -\frac{G\,m\,M}{R^2}\left\{\left[\sqrt{h^2+R^2}-|h|\right]-\left[\sqrt{h_0^2+R^2}-|h_0|\right]\right\} = \tag{58}$$

$$= -\frac{G\,m\,M}{R^2}\left\{\left[\sqrt{h^2+R^2}-\sqrt{h_0^2+R^2}\right]+\left[\,|h_0|-|h|\,\right]\right\}. \tag{59}$$

En este resultado final vale la pena observar que si $|h| < |h_0|$ *(es decir, si la distancia de la masa de prueba al objeto gravitante se ha reducido) la variación de la energía cinética es positiva lo que es razonable en vista de quela gravitación es atractiva lo que implica que el movimiento de la masa de prueba al acercarse hacia el disco debe ser cada vez más rápido. Reciprocamente, si* $|h| > |h_0|$ *el cambio de energía cinética es negativo (la partícula pierde energía cinética porque está ganando energía potencial.*

6. Problemas Propuestos

Los problemas constituyen una herramienta de aprendizaje y su utilidad depende de que la herramienta sea correctamente utilizada. Trate de resolver los problemas por usted misma(o), un libro con problemas resueltos en detalle solo le va a enseñar que hay tipos listos que saben resolver los problemas (pero eso usted ya lo sabe, o es que cree que los avances tecnológicos aparecen solos). Los solución de los problemas propuestos en estas notas no requiere <u>información</u> adicional a la contenida en las notas (por eso los coloqué aquí) lo único adicional que hace falta es querer intentar, **hágalo**.

Problema 1 *Encuentre la atracción gravitacional que tres partículas puntuales de masas idénticas (M) localizadas en los vertices de un triángulo equilátero ejercen sobre una partícula de* *prueba colocada en el centro geométrico de la distribución de masas centro.*

Problema 2 *Utlice las discusiones de estas notas para demostrar que la magnitud de la aceleración de caída de un cuerpo colocado cerca de la tierra es muy cercana a* $9{,}8m/s^2$

Problema 3 *Utilice el problema anterior para estimar la masa de la tierra.*

Problema 4 *El radio orbital medio de la tierra es de unos* 149×10^6 *millones de Km. Estime la masa del sol.*

Problema 5 *Considere la barrita del ejemplo (2) y una masa de prueba* m *colocada a una distancia* r *de la mediatriz del segmento formado por la barrita. ¿Cuál es la fuerza atracción gravitacional que la partícula ejerce sobre la barrita*[9]*?*

Problema 6 *Utilice lo que aprendió resolviendo el problema anterior para encontrar la fuerza gravitacional que una barra homogénea ejerce sobre particula colocada a distancia* z *sobre un eje perpendicular a la barrita y que pasa por un extremo de esta.*

Problema 7 *Una partícula de prueba está localizada en el centro de un anillo infinitamente delgado de radio* R *masa* M *distribuida uniformemente. ¿Cuál será la atracción gravitacional que el anillo ejerce sobre la partícula de prueba?*

Problema 8 *Una variante muy divertida del problema anterior es la siguiente. Una partícula de prueba está localizada en el centro de un arco infinitamente delgado de radio* R *masa* M *distribuida uniformemente. El arco se extiende a lo largo de* $1/4$ *de circunferencia ¿Cuál será la atracción gravitacional que el anillo ejerce sobre la partícula de prueba?*

[9] **Ayuda:** Recuerde que la fuerza es un vector, considere un sistema de coordenadas adecuado y todas las componentes de $d\vec{F}$

Problema 9 *Imagine que la masa de la tierra estuviera distribuida uniformemente y que fuéramos capaces de perforar un tunel que uniera dos puntos antipodales del planeta. ?Cómo sería el movimiento de una partícula de masa m (usted por ejemplo) que se soltara desde una de las entradas del tunel.*

Problema 10 *El problema anterior tiene una variante. ?Qué ocurriría si el tunel no pasara por el centro de la tierra? (es decir, si tuviera la geometr´ ii a de una "cuerda").*

Problema 11 *Considere un objeto cuya forma es la de una esfera sólida de radio* a *al que se ha extraído una cierta cantidad de materia dejando una cavidad esférica concéntrica con la esfera original. El radio de la cavidad es* $b(< a)$*. Encuentre la fuerza gravitacional con que este objeto atrae a una masa de prueba colocada en cualquier punto del espacio.*

Problema 12 *Demuestre la fórmula (17)*

Referencias

[1] Sears y XXX *Física Universitaria*, edit. xxxxxxx [**texto recomendado**]

[2] M. Alonso y E. J. Finn, *xxx*, yyyy

[3] Berkeley....

[4] S. Hawking, *A Hombros de Gigantes* Editorial Crítica, Barcelona 2004. ISBN: 84-8432-568-7

[5] J. B. Marion y S. Thorton, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, Saunders, 1995.