Sistemas de Partículas II

Dinámica de los Cuerpos Rígidos

Mario I. Caicedo

Índice

1. Motivación

Hasta ahora nos hemos concentrado en estudiar el movimiento del centro de masa de un sistema de partículas. Ahora bien, sabemos que esto es una sobresimplifación puesto que aun si el centro de masa viaje uniformemente debido a que las fuerzas externas al sistema se anulen, el comportamiento interno del sistema puede ser complejo

En este capítulo nos limitaremos a estudiar sistemas cuyo movimiento interno se reduce a una rotación pura.

Figura 1: A pesar de que una galaxia es un objeto complejo, su centro de masa se mueve como un punto, mientras que el detalle del movimiento interno de las estrellas que la forman está codificado en el *Momentum angular*

2. Momentum Angular

Nuestro objetivo consiste en describir algunos aspectos de la dinámica de los cuerpos rígidos, definidos como sistemas de partículas cuyas posiciones relativas permanecen fijas. Como aprenderemos, el movimiento de un objeto de este tipo puede entenderse en términos del movimiento de su centro de masa y un movimiento de rotación residual que se describe convenientemente a través del *Momentum angular*.

Nuestro objetivo de mediano plazo consiste en describir el movimiento de los *cuerpos rígidos*, estos son sencillamente sistemas de partículas en que las posiciones relativas de las partículas del sistema permanecen fijas.

En atención a los lineamientos generales que hemos mencionado introduciremos el concepto de Momentum angular como se aplica a los sistemas de partículas, para ello comenzaremos por recordar la definición del Momentum angular de una partícula y comentar algunos aspectos interesantes relacionados con ésta. El Momentum angular de una partícula con respecto a un origen está dado por

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}\,, \tag{1}$$

donde, $\vec{r}$ es la posición de la partícula y $\vec{p}$ su Momentum lineal.

Debido a su definición $\vec{L}$ depende de la posición del origen de coordenadas. Para ver esto consideremos, el Momentum angular de una partícula medido desde dos sistemas de coordenadas cuyos orígenes (O y O') están en reposo relativo y se encuentran separados por el vector ($\vec{OO'}$). Debido a que la velocidad relativa entre ambos sistemas de coordenadas es nula, los momenta ($\vec{p}$ y $\vec{p}'$) de la partícula en ambos sistemas son iguales. Sin embargo, los momenta angulares están dados por

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p}, \quad y & (2)\\ \vec{L}' &= (\vec{r} + \vec{OO'}) \times \vec{p}\,, & (3) \end{aligned}$$

de manera que ambos momenta angulares difieren en $\vec{OO'} \times \times p$ resultado que exhibe en forma explícita la dependencia del Momentum angular con la posición del origen de coordenadas, lo que obliga a ser cuidadosos al punto de tener que ser sumamente metódicos en la especificación del origen de coordenadas que va a utilizarse en cada cálculo.

Ejemplo 1 *Con el fin de aclarar nuestras ideas con respecto a Momentum angular consideremos un sistema extraordinariamente simple, una partícula que se mueve con velocidad constante de manera que su posición desde un cierto sistema de coordenadas está dada por*

$$\vec{r}(t) = (v_0 + x_0)\ \hat{\imath} + b\,\hat{\jmath} \tag{4}$$

es facil demostrar que el Momentum angular de esta partícula en las coordenadas del sistema de referencia está dada por:

$$\vec{L} = -m\,v_0\,b\,\hat{k} \tag{5}$$

donde m es la masa de la partícula y b -la distancia perpendicular entre la trayectoria incidente y el origen de coordenadas- es conocido como parámetro de impacto.

Si reescribimos esta igualdad en la forma

$$\vec{L} = -\left(m\,b^2\right)\ v_0/b\,\hat{k} \tag{6}$$

la expresión para el momentum angular de la partícula resulta idéntica a la de una partícula de masa m que rota con velocidad angular $\omega = v_0/b$ y radio b alrededor del origen.

Ejemplo 2 *Recordemos otro sistema que hemos estado estudiando, la haltera: dos bolas pequeñas de masa m unidas por una barra rígida, sin masa, de longitud $2a$ y para el cual, la posición de* *las masas está dada por*

$$x_1(t) = \nu_0 t + a\, sen\phi, \quad y_1(t) = a\, cos\phi \tag{7}$$

$$x_2(t) = \nu_0 t - a\, sen\phi, \quad y_2(t) = -a\, cos\phi\,. \tag{8}$$

Ya hemos mostrado que el momentum total y la energía del sistema son ($M = 2\,m$)

$$\vec{P} = M\,\nu_0\,\hat{\imath} \tag{9}$$

$$T = \frac{M\,\nu_0^2}{2} + \frac{m\,a^2\,\dot{\phi}^2}{2} + \frac{m\,a^2\,\dot{\phi}^2}{2}\,. \tag{10}$$

Calculemos ahora el momentum angular total del sistema con respecto al origen de coordenadas. Para ello basta con utilizar que el momentum angular total del sistema es la suma de los momenta angulares de cada componente del sistema y recordar como se calculan estos últimos. Para la partícula número 1 la expresión del momentum angular es

$$\vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 = [(\nu_0 t + a\, sen\phi)\,\hat{\imath} + a\, cos\phi\,\hat{\jmath}] \times\; m[(\nu_0 + a\,\dot{\phi}\, cos\phi)\,\hat{\imath} - a\,\dot{\phi}\, sen\phi\,\hat{\jmath}]\,, \tag{11}$$

utilizando la expresión correspondiente para la partícula 2 se encuentra el siguiente resultado final

$$\vec{L}_{total} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = 2\, \left(m\,a^2\dot{\phi}\right)\,\hat{k} \tag{12}$$

que no es más que la suma de los dos momenta angulares medidos desde el centro de masa del sistema, que en términos de la cantidad $I = 2\,m\,a^2$ que habíamos introducido anteriormente se puede expresar en la forma

$$\vec{L}_{total} = I\,\dot{\phi}\,\hat{k} = I\,\vec{\omega}\,, \tag{13}$$

en donde estamos utilizando que la velocidad angular de la haltera con respecto a su eje de rotación es $\vec{\omega} = \dot{\phi}\,\hat{k}$.

En resumen, podemos observar claramente que, como habíamos comentado en la introducción, el momentum angular describe aspectos del movimiento interno del sistema.

Ejemplo 3 *Modifiquemos el problema anterior ligeramente cambiando el sistema de referencia a otro en el que la posición del centro de la barra esté dada por*

$$\vec{r}_c(t) = \nu_0\, t\hat{i} + b\,\hat{j} \tag{14}$$

*Con respecto a estas nuevas coordenadas el centro de rotación del sistema tiene un parámetro de impacto b y no es muy difícil convencerse (***ejercicio***) de que sí se calcula el momentum angular del sistema se obtiene*

$$\vec{L} = (-M\, b\, \nu_0 + I\, \dot{\phi})\, \hat{k} \tag{15}$$

De manera que el momentum angular del sistema se expresa como la suma del momentum angular de una partícula de masa M (la masa total del sistema) que viaja a lo largo de una dirección paralela al eje x con parámetro de impacto b, y el término que representa la suma de los momenta angulares del sistema con respecto al centro de masa del sistema.

Como hemos hecho en otras oportunidades vamos a expresar los resultados de los ejemplos que hemos estudiados en forma general.

Teorema 1 *El Momentum angular de un sistema con respecto a un origen de coordenadas se expresa como la suma del Momentum angular del centro de masa del sistema con respecto al origen y los momenta angulares de las componentes del sistema con respecto al sistema del* *centro de masa, esto es*

$$\vec{L}_{total} = \vec{r}_{CM} \times M\vec{V}_{CM} + \sum_i \vec{r}_i^{(c)} \times m_i \vec{v}_i^{(c)} \tag{16}$$

La prueba del teorema es relativamente directa y consiste en calcular el Momentum angular total del sistema en forma explícita de forma que

$$\vec{L}_{total} = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) \,, \tag{17}$$

expresando la posición de cada partícula en términos de la posición del centro de masa y la coordenada relativa respectiva ($\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i^{(c)}$) se obtiene

$$\vec{L}_{total} = \sum_i \left[\vec{R} + \vec{r}_i^{(c)}\right] \times \left[m_i(\vec{V} + \vec{v}_i^{c})\right] \,. \tag{18}$$

Esta suma se descompone en cuatro términos de los cuales dos resultan ser nulos[1], a saber:

$$\vec{R} \times (\textstyle\sum_i m_i)\vec{V} = \vec{R} \times M\vec{V} = \vec{L}_{CM} \tag{19}$$

$$\vec{R} \times \textstyle\sum_i m_i \vec{v}_i^{c} = 0 \tag{20}$$

$$\textstyle\sum_i m_i \vec{r}_i^{(c)} \times \vec{V} = 0 \tag{21}$$

$$\textstyle\sum_i \vec{r}_i^{(c)} \, m_i \, \vec{v}_i^{c} \equiv \vec{L}^{(c)} \tag{22}$$

en definitiva

$$\vec{L}_{total} = \vec{R} \times \vec{P} + \sum_i \vec{L}_i^{(c)} \tag{23}$$

que es lo que queríamos probar.

[1]Ejercicio de repaso: ¿por qué?

3. Momento de Inercia

En nuestro ejemplo de estudio: la haltera que se desplaza rotando sobre una mesa hemos encontrado que la cantidad $I = 2\,m\,a^2$ que evidentemente depende de la masa y la geometría del sistema aparece involucrada en las expresiones para la energía cinética "interna" $T = \frac{I\,\dot{\phi}^2}{2}$ y de su momentum angular con respecto al centro de masa: $\vec{L} = I\,\vec{\omega}$. El propósito de este sistema es generalizar esta noción a sistemas de mayor generalidad.

Consideremos un sistema de partículas que están distribuidas de manera simétrica con respecto a un eje y que se encuentra en estado de rotación pura alrededor de dicho eje, queremos calcular el Momentum angular en el sistema del centro de masa

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i^{(c)} \tag{24}$$

ya que como hemos aprendido en el teorema (1), la corrección a cualquier otro sistema de referencia está dada por el término $M\vec{R} \times \vec{P}$

En vista de la geometría del problema el centro de masa del sistema se encuentra en algún punto a lo largo de su eje de simetría lo que obviamente sugiere utilizar un sistema de coordenadas cilíndricas en cuyo origen se sitúe al centro de masa del sistema y cuyo eje z coincida su eje de simetría.

Como el sistema está rotando alrededor de su eje de simetría la velocidad de la i-esima partícula del sistema en el sistema del CM es sencillamente

$$\vec{v}_i^{(c)} = \omega\, r_i^{(c)}\, sen\theta_i\, \hat{u}_\phi \quad , \tag{25}$$

donde ω es la velocidad angular, θ_i es el ángulo que el vector de posición[2] ($\vec{r}^{(c)}$) forma con el eje z y $\hat{u}_\phi$ es el vector de base de las coordenadas cilíndricas asociado al ángulo azimutal. De acuerdo a esto, el Momentum linea$\vec{L}$l de la partícula es

$$\vec{p}_i^{(c)} = m_i \, \omega \, r_i^{(c)} \, sen\theta_i \, \hat{u}_\phi \tag{26}$$

acá vale la pena observar que el producto $r_i^{(c)} sen\theta_i$ no es otra cosa que el radio de giro de la partícula, es decir, la distancia entre la partícula y el eje de rotación. Con el fin de simplificar la notación eliminaremos la simbología $^{(c)}$ en el entendimiento de que todo el cálculo que estamos realizando está referido al centro de masa. Al calcular el Momentum angular de la partícula se obtiene

$$\begin{aligned} \vec{L}_i &= (r_i sen\theta_i \hat{u}_\rho + r_i cos\theta_i \hat{k}) \times m_i \omega r_{i\perp} \hat{u}_\phi = \\ &= m r_i^2 sen^2\theta_i \omega \hat{k} - m r_i^2 sen\theta_i cos\theta_i \omega \hat{u}_\rho \end{aligned} \tag{27}$$

ahora bién, en vista de que el sistema es simétrico cada partícula tiene una correspondiente, y en consecuencia al sumar sobre todas las partículas los términos radiales se cancelan entre si. En definitiva, el Momentum angular total del sistema resulta ser

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = (\sum_i m_i r_i^2 sen^2\theta_i) \, \omega \hat{k} = I \vec{\omega} \tag{28}$$

donde hemos introducido la cantidad

$$I \equiv \sum_i m_i r_i^2 sen^2\theta_i = \sum_i m_i \, r_{i\perp}^2 \quad , \tag{29}$$

en que estamos utilizando el radio de giro de la partícula ($r_{i\perp} = r_i^{(c)} sen\theta_i$) en forma explícita.

[2]recuerde que en la notación que estamos usando: $r_i^{(c)} = |\vec{r}_i^{(c)}|$

En definitiva, hemos demostrado que si un sistema es simétrico con respecto a un eje, su Momentum y velocidad angulares son proporcionales. Como veremos más adelante, la cantidad I que recibe el nombre de *momento de inercia* da una medida de la resistencia que ofrece un sistema a que se cambie su estado de rotación, y en este sentido es el análogo angular de la masa.

En el caso de un sistema con una distribución contínua de masa el resultado es el mismo y el momento de inercia se calcula con una integral:

$$I = \int r_{\perp}^{2} dm \quad . \tag{30}$$

Nuestra presentación del momento de inercia difiere bastante de la que se consigue en la literatura usual en que el momento de inercia se introduce a través de un análisis de la energía de un sistema físico rotante. Esto se hizo a propósito con el fin de destacar algo, si el sistema no es simétrico respecto al eje de rotación no hay una cancelación completa de las componentes radiales del Momentum angular total ($\vec{L}$), y por lo tanto este y la velocidad angular no resultan paralelos, lo que indica que de existgir una relación de linealialidad entre ambos esta no puede estar dada por una cantidad escalar.

4. Energía cinética de un Rígido

Consideremos un sistema rígido discreto, queremos calcularla energía cinética del sistema, antes hemos aprendido que en general

$$T = T_{CM} + T^{(rel)} \tag{31}$$

Para estudiar el problema dentro del nivel de este curso consideraremos que la orientación del sistema no cambia (es decir, que su eje de rotación permanece siempre con la misma orientación). La velocidad de cada partícula del sistema es

$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{u}_i \,, \tag{32}$$

pero, las partículas del sistema se encuentran en rotación pura con respecto al eje instantáneo de rotación que pasa por el centro de masa, de manera que

$$\vec{v}_i = \vec{V} + r_{i\perp}\vec{\omega} \,, \tag{33}$$

al calcular el cuadrado de $\vec{v}_i$ y sumar los términos que hay que tomar en cuenta para calcular la energía cinética se obtiene

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(V^2 + 2\vec{V}.\vec{u}_i + r_{i\perp}^2\omega^2\right) = \\ &= \frac{M\,V^2}{2} + \left(\sum_i \frac{m_i\, r_{i\perp}^2}{2}\right)\omega^2 = T_{CM} + \frac{I\,\omega^2}{2} \end{aligned} \tag{34}$$

5. Torque

Volvamos por un rato al estudio de una sola partícula y calculemos la tasa de cambio ($\dot{\vec{L}}$) de su Momentum angular medido con respecto a algun referencial. El resultado es bastante simple:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{r} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} \quad . \tag{35}$$

El primero de los sumandos es nulo puesto que el Momentum lineal y la velocidad son paralelos mientras que en el segundo podemos utilizar la segunda ley de Newton para cambiar la tasa de cambio del Momentum lineal de la partícula por la fuerza neta que actúa sobre esta, y podemos concluir que

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \quad . \tag{36}$$

Este resultado motiva la siguiente

Definición 1 *Consideremos una fuerza ($\vec{F}$) y su punto de aplicación, el torque de $\vec{F}$ con respecto a un punto P es el producto vectorial*

$$\vec{\tau} \equiv \vec{r} \times \vec{F} \tag{37}$$

donde $\vec{r}$ es la posición del punto de aplicación de $\vec{F}$ con respecto a P.

Estudiemos ahora la tasa de cambio del Momentum angular total de un sistema de partículas y su relación con la definición del torque (o par asociado a una fuerza).

Como antes, el Momentum angular total de un sistema es

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \tag{38}$$

pretendemos calcular la rata de cambio de $\vec{L}$ antes de llevar a cabo cualquier simplificación, al diferenciar obtenemos:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \tag{39}$$

donde hemos utilizado la misma técnica de cálculo que en el caso de una partícula, ahora bien, la fuerza sobre la i-ésima partícula es

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(ext)} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} \tag{40}$$

y por lo tanto

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i^{(ext)} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} \right) = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(ext)} + \sum_{i,j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} \quad . \tag{41}$$

El segundo sumando se puede reescribir de forma divertida:

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} &= \frac{1}{2} \left[\sum_{i,j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \sum_{i,j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[\sum_{i,j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \sum_{i,j} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[\sum_{i,j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} - \sum_{i,j} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ji}
\end{aligned} \tag{42}$$

ahora bien, si las fuerzas internas entre las partículas del sistema son centrales las $\vec{F}_{ji}$ serán paralelas a los vectores $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ y por lo tanto el sumando será nulo. En ese caso y solo en ese caso, la derivada del Momentum angular total del sistema resulta ser:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i^{(ext)} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} \right) = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(ext)} \quad . \tag{43}$$

De manera que la derivada temporal del Momentum angular de un sistema no es otra cosa que la suma de los torques externos que actúan sobre el sistema.

La ecuación (43) constituye el análogo rotacional de la segunda ley de Newton $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$. En este curso nos limitaremos a estudiar sistemas sencillos compuestos por *cuerpos rígidos* en rotación alrededor de un eje cuya orientación se mantenga fija.