Sistemas de Partículas I

Centro de Masa

y Teorema del Momentum

Mario I. Caicedo

Departamento de Física, Universidad Simón Bolívar

Índice

1. Centro de Masa

La primera parte de cualquier curso de física elemental nos *habitua* a tratar cuerpos de extensión finita como si fueran objetos puntuales. Así por ejemplo, tratamos al sol y la tierra como si fueran dos puntos, a un hombre como si no tuviera extensión y lo mismo hacemos con cajas, poleas, etc.

Ciertamente tanto nuestra intuición (¿no diría usted que una persona vista de muy lejos, digamos que a dos Km de distancia, se ve como un punto?) como los resultados de algunos cálculos basados en estas aproximaciones parecen ser bastante razonables, pero vale la pena preguntarse ¿hasta qué punto podrá justificarse la aproximación de partícula puntual?. Esta pregunta está hecha en un sentido matemático, en el entendimiento de que la mecánica pretende dar un modelo matemático de cierta realidad. Debemos entender que el hecho de que nuestras aproximaciones parezcan razonables no significa que tengan algún soporte teoremático. Siguiendo este orden de ideas dedicaremos las próximas clases a buscar una justificación matemática a la aproximación de partícula puntual.

Con el fin de llevar a cabo este programa debemos introducir el concepto de *sistema*, para ello consideremos un conjunto ($\mathcal{M}$) de partículas y sus interacciones mútuas, un *sistema* de partículas es un subconjunto arbitrario ($\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$) de partículas del conjunto inicial, el complemento de $\mathcal{C}$ recibe la denominación de *ambiente* ó exterior, las interacciones entre las partículas del sistema se denominan *fuerzas internas*, mientras que las interacciones con las partículas del ambiente se denominan: *fuerzas externas*. La sutileza del concepto de sistema está asociada a la arbitrariedad con que se define el sistema, en efecto, la definición de un sistema depende de lo que queramos estudiar.

Consideremos por ejemplo el conjunto de objetos físicos constituido por la tierra, la luna, el sol y el resto del sistema solar, es más o menos claro que si queremos estudiar los movimientos de la luna con respecto a la tierra deberíamos tomar como sistema al par tierra-luna, y como ambiente al resto del sistema solar.

En resumen, lo que se oculta detrás del concepto de sistema es la idea mecanicista fundamental de aislar las componentes de un todo para intentar entender el comportamiento del todo como resultado del comportamiento de las partes. Con esta idea en mente vamos a introducir un concepto bastante más preciso

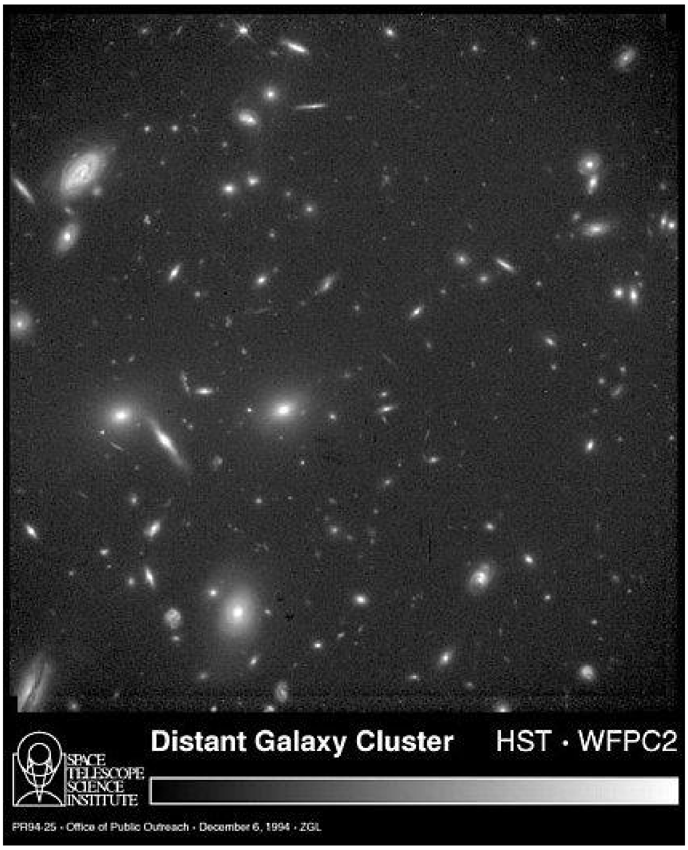

Figura 1: Esta fotografía tomada por el telescopio espacial Huble muestra un cúmulo de galaxias. Cada galaxia tiene un diámetro del orden de los cientos de años luz, sin embargo, la dinámica conque interactúan entre sí puede aproximarse razonablemente tratando a cada galaxia como si fuera un punto

Definición 1 *Dado un sistema constituido por un conjunto de partícula puntuales de masas* m_1*,* m_2*,* m_3*,...,* m_N*, el* **centro de masa** *(CM) del sistema es un* <u>*punto abstracto*</u> *cuyo vector de posición se calcula por medio de la fórmula*

$$\vec{R} \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \,, \tag{1}$$

donde:

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i \tag{2}$$

es la masa total del sistema.

Desde el punto de vista matemático es evidente que el vector $\vec{R}$ representa un *promedio pesado* de las posiciones ocupadas por todas las partículas que forman al sistema. Con respecto a la definición del centro de masa hay dos observaciones que deberían resultar obvias, en primer lugar, que la posición del CM no tiene que coincidir con la posición de alguna de las partículas del sistema y en segundo, que debido a que encontrar $\vec{R}$ involucra el cálculo de un promedio ponderado en el que los pesos de los objetos a promediar (las posiciones de cada partícula del sistema) están dados por las masas de las partículas, el CM tiende a acercarse a aquellas regiones en que se concentre más masa. Así por ejemplo, si dos partículas tienen masas M y $3M$ y están separadas por una distancia ℓ, su CM estará localizado a lo largo del segmento que las separa y a una distancia $\frac{\ell}{4}$ de la partícula más masiva[1].

Ejemplo 1 *Consideremos el sistema compuesto por la tierra y el sol y coloquemos el sistema de referencia en el centro de este último, las masas de ambos objetos celestes son:* $M_T = 5{,}976 \times 10^{24}$

[1]Verfifique esto como ejercicio

Kg y $M_O = 1{,}989 \times 10^{30}$ Kg. En este caso la posición del centro de masa del sistema con respecto al origen de coordenadas es

$$\vec{R} = \frac{0 + 5{,}976 \times 10^{24}\, \vec{r}}{1{,}989 \times 10^{30} + 5{,}976 \times 10^{24}} \tag{3}$$

donde $\vec{r}$ es la posición de la tierra con respecto al origen, reescribiendo las cosas un poco resulta:

$$\vec{R} = 5{,}976 \times 10^{24} \, \frac{\vec{r}}{1{,}989 \times 10^{30}(1 + \frac{5{,}976 \times 10^{24}}{1{,}989 \times 10^{30}})} \approx 3{,}00 \times 10^{-6} \times \vec{r}\,, \tag{4}$$

resultado cuya interpretación es muy sencilla: el centro de masa del sistema tierra sol se encuentra practicamente en el centro del sol

Si el sistema está constituido por un sistema cuya masa está distribuida continuamente, la fórmula de cálculo de la posición del centro de masa debe cambiarse ligeramente. El cambio viene de observar que cada elemento infinitesimal de volumen (dv) del cuerpo puede considerarse como una masa infinitesimal de magnitud $d\,m = \rho\, dv$ de manera que debemos efectuar el cambio $m_i \to \; d\,m$ y consecuentemente la suma debe cambiarse por una integral, es decir, que para un contínuo, la posición dle centro de masa se calcula por

$$\vec{R} \equiv \frac{1}{M} \int_{Vol} \rho\, \vec{r}\; dv \tag{5}$$

donde $\vec{r}$ es la posición del elemento de volumen.

2. Momentum lineal de un sistema de partículas

Para convencernos de la utilidad de la noción del centro de masas recordemos que el momentum lineal $\vec{p}$ de una partícula de masa m que se desplaza con velocidad $\vec{v}$ con respecto a algún sistema de referencia está dado por

$$\vec{p} = m\,\vec{v}\,, \tag{6}$$

mientras que el momentum total ($\vec{P}$) de un conjunto de partículas está dado por la suma (vectorial) de los *momenta* individuales, esto es:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i\,. \tag{7}$$

Estudiemos en detalle algunos aspectos de un sistema compuesto de dos (2) partículas de masas m_1 y m_2 de manera que el momentum del sistema está dado por:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2\,, \tag{8}$$

por otra parte la posición del CM del sistema es

$$\vec{R} = \frac{1}{M}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)\,. \tag{9}$$

Sí calculamos la derivada temporal de $\vec{R}$ resulta

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{R}}{dt} &= \frac{1}{M}\left[m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2\right] \\ &= \frac{1}{M}\left[\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right]\,, \end{aligned} \tag{10}$$

es decir,

$$\vec{P} = M\vec{V},\,, \tag{11}$$

donde

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} \tag{12}$$

es la velocidad del centro de masa del sistema. La comparación de las fórmulas (8)(11) y (12), nos dice que el momentum total del sistema es igual al producto de la masa total del sistema por la velocidad del CM. Podemos dar un paso más diferenciando la identidad (8) con respecto al tiempo para obtener

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2\,. \tag{13}$$

Ahora bien, debemos recordar que estamos pensando en la idea de sistema y que por lo tanto la fuerza sobre cada una de las dos partículas debe entenderse como la suma de la fuerza que ejerce la otra y la fuerza (neta) ejercida por todos los agentes externos al sistema, es decir:

$$\dot{\vec{p}}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_1^{(ext)} \tag{14}$$

$$\dot{\vec{p}}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_2^{(ext)}\,, \tag{15}$$

de manera que la derivada del momentum total del sistema se puede expresar en términos de las fuerzas como

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \;=\; \vec{F}_{21} + \vec{F}_1^{(ext)} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_2^{(ext)}\,. \tag{16}$$

En este punto debemos recordar que las fuerzas ejercidas entre las partículas ($\vec{F}_{21}$ y $\vec{F}_{12}$) son pares de acción reacción, así que de acuerdo a la segunda ley de Newton

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0 \tag{17}$$

de manera, que en definitiva hemos demostrado el siguiente resultado

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}_1^{(ext)} + \vec{F}_2^{(ext)} \equiv \vec{F}^{(ext)}\,, \tag{18}$$

cuyo significado físico es bastante claro: *el centro de masa de un sistema puede considerarse como una partícula de masa M que se mueve bajo la influencia de las fuerzas externas al* *sistema.* Este es el resultado que estábamos buscando, en efecto, la igualdad (18) nos dice que si queremos aproximar a un sistema por un punto, el punto debe ser el centro de masa del sistema, más aún, el movimiento de el punto que sustituye al sistema está dictado solamente por las fuerzas externas al sistema y en consecuencia, los detalles de los movimientos internos de las partículas que forman al sistema son irrelevantes para el movimiento del centro de masa.

3. Teorema del Momentum

El resultado ejemplo que hemos estudiado en la sección anterior se puede generalizar sin problema para ser enunciado en la siguiente forma:

Teorema 1 *El momentum total de un sistema de partículas ($\vec{P}$) es igual al producto de la masa del sistema por la velocidad de su centro de masa, y obedece la ley de movimiento*

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(ext)} \tag{19}$$

donde $\vec{F}^{(ext)}$ es la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema.

la demostración del teorema se deja como ejercicio interesante.

Volviendo al teorema (1) referente al momentum lineal de un sistema, veamos un par de corolarios. El primero (y más evidente) de ellos es el siguiente

> *Si las fuerza externa neta que actúa sobre un sistema es nula, el sistema tendrá momentum constante*

La demostración de este resultado es inmediata y se deja como ejercicio. El segundo corolario es el siguiente

> *Si la componente de la fuerza externa neta a lo largo de una cierta dirección es nula, el momentum del sistema a lo largo de esa direccdión será constante constante*

en términos más precisos, si $\hat{n}$ es un vector constante y $\vec{F}^{(ext)}.\hat{n} = 0$ entonces $\vec{P}.\hat{n} = constante$. A pesar de que este corolario tiene un enunciado algo menos trivial que el primero su prueba también es inmediata.

El último de los corolarios tiene un significado físico bastante interesante que podemos ilustrar fácilmente. Consideremos el movimiento de una masa puntual bajo una fuerza constante ($\vec{F}_0$)(pensemos por ejemplo en el lanzamiento balístico de manera que la fuerza coincida con el peso) y sea $\hat{e}$ un vector ortogonal a la fuerza (en el ejemplo, un vector horizontal), ciertamente $\vec{F}_0.\hat{e} = 0$ y por lo tanto $\vec{p}.\hat{e} = constante$, ahora bién el momentum de la partícula no es más que el producto de su masa y su velocidad, de esta manera, el corolario refleja el hecho de que la componente horizontal de la velocidad en un lanzamiento parabólico es constante.

Ejemplo 2 *Veamos una aplicación del teorema del momentum.*

Consideremos un sistema formado por tres masas idénticas entre las que se han colocado dos resortes (sin masa) comprimidos. El sistema está colocado en reposo sobre una mesa sin rozamiento y se mantiene unido gracias a unos hilos. En cierto instante los hilos se cortan y las masas comienzan a moverse sobre la mesa. Sabiendo que la energía amacenada en los resortes es E_0 y que la velocidad de dos de las masas $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ es de idéntica magnitud y forman 90^0 entre sí, ¿cuales serán las velocidades de las tres masas?.

Para comenzar escojamos un sistema de referencia cuyo centro se encuentre en la posición inicial del centro de masa del sistema, y dotémosle de un sistema de coordenadas cartesianas cuyo eje z es perpendicular a la mesa y cuyos ejes x e y son paralelos a las velocidades $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$. De acuerdo a la información que poseemos podemos poner

$$\vec{p}_1 = p\,\hat{i}\,, \quad y \quad \vec{p}_2 = p\,\hat{j}\,. \tag{20}$$

Por otra parte, el momentum inicial del sistema es nulo y como no hay ninguna fuerza horizontal externa el momentum horizontal del sistema debe mantenerse nulo, por tanto, si $\vec{p}_3$ es el momentum de la masa cuya velocidad es totalmente desconocida, podemos asegurar que

$$\vec{p}_3 = -p\,\left(\hat{i} + \hat{j}\right)\,. \tag{21}$$

Finalmente, la energía cinética del sistema se calcula como

$$T = \sum \frac{p_i^2}{2\,m} = \frac{2}{m}\,p^2 \tag{22}$$

esta energía debe ser idéntica a la energía almacenada en los resortes, y por lo tanto

$$\frac{2}{m}\,p^2 = 2\,m\,v^2 = E_0 \tag{23}$$

de donde:

$$\vec{v}_1 = \sqrt{\frac{E_0}{2\,m}}\,\hat{i} \tag{24}$$

$$\vec{v}_2 = \sqrt{\frac{E_0}{2\,m}}\,\hat{j} \tag{25}$$

$$\vec{v}_3 = -\sqrt{\frac{E_0}{2\,m}}\,\left(\hat{i} + \hat{j}\right) \tag{26}$$

Ejemplo 3 *Hemos insistido en que estamos interesados en discutir sistemas de partículas y con el fin de entender algunos aspectos del problema general, comenzaremos nuestra discusión con un sistema bastante sencillo que consiste en dos bolas pequeñas de masa m (que consideraremos puntuales) unidas por una barra rígida*[2]*. Para ser aún más específicos, supongamos que el centro de la haltera se desplaza en línea recta con rapidez uniforme ν_0, mientras rota con ritmo uniforme ω_0 rad/seg alrededor de su centro.*

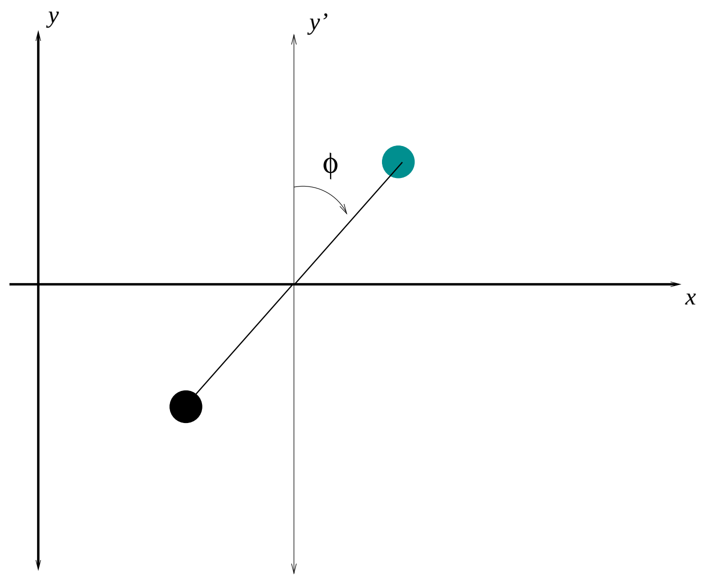

Figura 2: El sistema de coordenadas utilizado. El ángulo ϕ se mide con respecto al eje y'. En $t = 0$ el centro de la haltera coincide con el origen del sistema de referencia $x - y$

De acuerdo a la descripción del sistema y escogiendo un sistema de coordenadas inercial cartesiano de tal suerte que (i) en $t = 0$ el centro de la barra coincida con el origen, (ii) el

[2]Este sistema se denomina *haltera*, sin masa, de longitud $2\,a$, y es por eso que el levantamiento de pesas olímpico se conoce como *halterofilia*

plano de giro de la barra es el plano $x-y$ y (iii) el eje x es paralelo a la dirección del movimiento del centro de la barra, las posiciones de las dos bolitas masivas estarán dadas por

$$x_1(t) = \nu_0 \, t + a \, sen\phi, \quad y_1(t) = a \, cos\phi \tag{27}$$

$$x_2(t) = \nu_0 \, t - a \, sen\phi, \quad y_2(t) = -a \, cos\phi \, , \tag{28}$$

donde $\phi = \phi(t) = \omega_0 \, t + \theta_0$ es el ángulo -medido en sentido horario- que forman el lado de la barra conectado con una de las masas (que siempre deberá ser la misma) y el eje y' comovil con el centro de la barrita.

Al calcular el Momentum total del sistema -como suma de los momenta de cada partícula- obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{P} &= m \, (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)\hat{i} + m \, (\dot{y}_1 + \dot{y}_2)\hat{j} \\ &= m \, [\nu_0 + a\dot{\phi} \, (cos\phi - cos\phi)]\hat{i} + m \, a \, [\dot{\phi} \, (sen\phi - sen\phi)]\hat{j} = M \, \nu_0 \, \hat{i} \, , \end{aligned} \tag{29}$$

donde $M = 2 \, m$ es la masa del sistema.

Analicemos este resultado a la luz de lo que hemos aprendido hasta este punto. En primer lugar, es evidente que el centro de masa del sistema se encuentra localizado en el centro de la barra, por otra parte, no es menos obvio el hecho de que el centro de la barra se mueve con velocidad $\vec{V}_{CM} = \nu_0 \, \hat{i}$ de manera que la fórmula (29) no hace más que confirmar que el momentum del sistema es igual al producto de la masa del sistema por la velocidad de su centro de masa (observe que esto es independiente de que la tasa de rotación $\dot{\phi}$ sea uniforme).

4. Energía Cinética de un Sistema

Hemos comentado que para la dinámica del centro de masa el movimiento interno del sistema es irrelevante, esto parece simplificar demasiado las cosas ya que no parece razonable que todos los sistemas puedan reducirse a puntos y nada más. Vamos a estudiar una cantidad física en la cual los detalles del movimiento interno aparecen en forma natural, con este fin vamos a introducir un sistema de referencia auxiliar localizado en el centro de masa del sistema. Con respecto a un sistema de referencia arbitrario **O**, los vectores de posición de un sistema de dos partículas son

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{r}_1^{(c)} \tag{30}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} + \vec{r}_2^{(c)} \tag{31}$$

donde $\vec{R}$ es la posición del centro de masa de la haltera con respecto a **O** y $\vec{r}_1^{(c)}$ y $\vec{r}_2^{(c)}$ son las posiciones de las partículas en el sistema del centro de masa.

Antes de continuar la discusión notemos que (ejercicio) *El momentum total medido en el sistema del centro de masa es nulo*

Ejemplo 4 *Volvamos a considerar la haltera que estudiamos en el ejemplo 3. Ya hemos encontrado que con respecto al sistema de coordenadas inercial que habíamos introducido la velocidad del centro de masa del sistema es $\vec{V} = \nu_0\,\hat{i}$, mientras que las velocidades relativas de las partículas con respecto al sistema de referencia del sistema centro de masa son (verifique esto) $\vec{u}_1 = a\,\dot{\phi}\,\hat{u}_\phi^{(+)}$ y $\vec{u}_1 = a\,\dot{\phi}\,\hat{u}_\phi^{(-)}$ donde*

$$\hat{u}^{(\pm)} = \pm\, cos\phi\,\hat{i} \mp\, sen\phi\,\hat{j} \tag{32}$$

Al calcular los cuadrados de los momenta individuales de cada partícula obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{p_1}^{\,2} &= m^2\,(\nu_0 + a\,\dot{\phi}\,cos\phi)^2 + m^2\,a^2\,\dot{\phi}^2\,sen^2\phi = \\ &= m^2\,\nu_0^2 + 2\,m^2\,a\,\dot{\phi}\,cos\phi + m^2\,a^2\,\dot{\phi}^2 \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} \vec{p_2}^{\,2} &= m^2\,(\nu_0 - a\,\dot{\phi}\,cos\phi)^2 + m^2\,a^2\,\dot{\phi}^2\,sen^2\phi = \\ &= m^2\,\nu_0^2 - 2\,m^2\,a\,\dot{\phi}\,cos\phi + m^2\,a^2\,\dot{\phi}^2 \end{aligned} \tag{34}$$

de manera que al calcular la energía cinética resulta

$$T = \frac{p_1^2}{2\,m} + \frac{p_2^2}{2\,m} \quad = \quad \frac{M\,\nu_0^2}{2} + \frac{m\,a^2\,\dot{\phi}^2}{2} + \frac{m\,a^2\,\dot{\phi}^2}{2}\,. \tag{35}$$

El primer término de esta suma es evidentemente la energía cinética traslacional del centro de masa del sistema, los otros dos términos representan la suma de las energías cinéticas de cada uno de los miembros del sistema medidas con respecto al centro de masa. Nótese que si $a \to 0$ el sistema es un sistema puntual y que por lo tanto en ese caso no puede haber energía cinética interna del sistema.

Si introducimos una nueva cantidad: $I = m\,a^2 + m\,a^2 = 2\,m\,a^2$, que solo depende de la masa del sistema y de su geometría, podemos rescibir la energía cinética rotacional de la haltera en la forma

$$T_{rot} = \frac{I\,\dot{\phi}^2}{2}\,, \tag{36}$$

esta expresión tiene toda la apariencia de una energía cinética en que la inercia (masa) rotacional del sistema es I cuyas unidades son de masa $\times$ longitud^2 y en donde la velocidad que hay que usar es la velocidad angular $\dot{\phi}$.

Por cierto, la cantidad $m\,a^2\,\dot{\phi}^2$ *es el momentum angular de una de las masas de la haltera medido con respecto al centro de la misma de manera que si* $\vec{L}^{(c)}$ *es el momentum angular total de la haltera medido con respecto al centro de masa de la misma podemos poner:*

$$T = \frac{P^2}{2\,M} + \frac{(\vec{L}^{(c)})^2}{2\,I}\,. \tag{37}$$

Queremos sistematizar el resultado que hemos encontrado en el ejemplo anterior, es decir, queremos ver si es posible encontrar una expresión para la energía cinética total del sistema que involucre a la velocidad del centro de masa y posiblemente a las velocidades relativas de las partículas del sistema con respecto al centro de masa del mismo, para ello recordemos una vez más que la energía cinética no es más que la suma de las energías de cada partícula, esto es

$$T = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2\,, \tag{38}$$

ahora bien, si escribimos las velocidades en términos de la velocidad del centro de masa ($\vec{V}$) y de las velocidades relativas $\vec{u}_1 = \dot{\vec{r}}_1^{(c)}$, $\vec{u}_2 = \dot{\vec{r}}_2^{(c)}$ resulta

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1(\vec{V}+\vec{u}_1)^2\frac{1}{2}m_2(\vec{V}+\vec{u}_2)^2 = \\ &= \frac{1}{2}m_1\left[V^2 + 2\vec{V}.\vec{u}_1 + u_1^2)\right] + \frac{1}{2}m_2\left[V^2 + 2\vec{V}.\vec{u}_2 + u_2^2)\right] \\ &= \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 + \vec{V}.(m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2) + \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_1 u_1^2\,. \end{aligned} \tag{39}$$

Por otra parte, $m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = 0$ ya que esta cantidad es el momentum total relativo al centro de masa, de manera que hemos probado que

$$T = \frac{M}{2}V^2 + T^{(rel)}\,, \tag{40}$$

donde

$$T^{(rel)} = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2\,. \tag{41}$$

Una vez más dar una interpretación física a un resultado matemático es a la vez sencillo pero extremadamente interesante, la fórmula (40) nos dice que la energía cinética del sistema no es solamente la energía cinética de una partícula de masa M moviéndose con el centro de masa sino que hay que tomar en cuenta la energía asociada a los movimientos de la estructura interna del sistema. Este resultado también se generaliza a un sistema con un número arbitrario de partículas, en cuyo caso el enunciado es el siguiente (la prueba se deja como ejercicio)

Teorema 2 *La energía cinética total (T) de un sistema de partículas es la suma de dos términos, la energía cinética del centro de masas y la energía cinética de las partículas del sistema calculadas con las velocidades relativas al centro de masas*

$$T = \frac{MV^2}{2} + T^{(rel)}, \quad \textit{donde} \quad T^{(rel)} \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}m_i u_i^2 \tag{42}$$

5. El Referencial de Momemtum Cero

Otra forma -muy natural por cierto- de introducir el centro de masa es definiendo un sistema de referencia en el cual el momemtum del sistema que se considere sea nulo. En efecto, consideremos un sistema de N partículas de masas m_1, m_2,...m_N cuyas posiciones con respecto a algún observador inercial están dadas por $r_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Queremos inquirir acerca de la posibilidad de definir un nuevo sistema de coordenadas en el que el momemtum total del sistema:

$$\vec{P} = \sum_i m_i, \vec{r}_i \tag{43}$$

se anule.

Supongamos que tal referencial (S) existe y llamemos $\vec{r}_i'$ a la posición de la i-ésima partícula con respecto a S, entonces, si llamamos $\vec{P}'$ al momemtum del sistema con respecto a S tendremos:

$$\vec{P}' = \sum_i m_i, \dot{\vec{r}}_i' = 0 \tag{44}$$

donde los vectores $\vec{r}_i'$ representan las posiciones de las partículas con respecto a S. Ciertamente: $\vec{r}_i = \vec{R}_{OS} + \vec{r}_i'$ y por lo tanto de existir S debe ocurrir que

$$\sum_i m_i, \left[\vec{v}_i' - \vec{V}\right] = 0 \tag{45}$$

donde $\vec{V} = \dot{\vec{R}}_{OS}$ y $\vec{v}_i' = ve\dot{c}r_i'$. De acuerdo a este resultado, S es un sistema de referencia que debe moverse con respecto a O con velocidad

$$\vec{V} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i \tag{46}$$

donde $M = \sum_i m_i$ es la masa total del sistema. Más aún podemos integrar para obtener que la posición de S con respecto a O está dada por:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i \tag{47}$$

que efectivamente es la posición del centro de masa.

6. El problema de dos cuerpos

Como una aplicación muy interesante del sistema de referencia del centro de masa (o referencial de momentum nulo) estudiemos la dinámica de un sistema de dos partícula completamente aislado de fuerzas externas.

Las ecuaciones de movimiento de este sistema están constituidas por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{21} \tag{48}$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{12} \tag{49}$$

Vamos a utilizar un cambio de variables para reescribir este sistema de ecuaciones en forma más conveniente, para comenzar sumemos ambas ecuaciones para obtener

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 + \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0 \tag{50}$$

ó

$$\ddot{R}_{CM} = 0 \tag{51}$$

donde hemos utilizado la tercera ley de Newton para demostrar que el lado derecho de la ecuación debe ser nulo.

Adicionalmente, si dividimos cada ecuación por la masa que aparece en cada ecuación y restamos los resultados obtenidos resulta

$$\ddot{r}_2 - \ddot{r}_1 = \frac{\vec{F}_{12}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_1} \tag{52}$$

pero, $\vec{r}_2 - \vec{r} = \vec{r}_{12}$ no es otra cosa que el vector de posición de la partícula 2 con respecto a la 1, adicionalmente, si volvemos a utilizar la tercera ley de Newton en el lado derecho de la ecuación 52 resulta

$$\ddot{r}_{12} = \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right) \vec{F}_{12}\,, \tag{53}$$

ó

$$\mu\, \ddot{r}_{12} = \vec{F}_{12}\,, \tag{54}$$

donde

$$\mu \equiv \frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2} \tag{55}$$

se denomina la masa reducida del sistema. En definitiva, las ecuaciones diferenciales que describen la dinámica del sistema de dos partículas aisladas de su entorno puede reescribirse en la forma

$$\begin{aligned} \dot{\vec{R}}_{CM} &= \vec{V} = ctte & (56) \\ \mu\, \ddot{r}_{12} &= \vec{F}_{12}\,. & (57) \end{aligned}$$

La primera de estas ecuaciones solo nos dice lo que ya sabíamos: que en estas condiciones la velocidad del centro de masas es constante. La segunda es bastante más interesante, nos dice que podemos pensar en la dinámica del movimiento relativo de las dos partículas como el movimiento de una sola partícula, cuya masa es la masa reducida del sistema, sobre la que actúa la fuerza de interacción entre las dos partículas.

Ejemplo 5 *Si pensamos en el problema de la tierra en interacción con el sol y despreciamos el efecto de los otros planetas del sistema solar, la ecuación 57 se reduce a*

$$\mu\, \ddot{r}_{ST} \;=\; -G\, \frac{M_o\, M_T}{r_{ST}^3}\, \vec{r}_{ST}\,, \tag{58}$$

donde M_o y M_T son las masas de sol y la tierra respectivamente, $\vec{r}_{ST}$ es el vector de posición de la tierra con respecto al sol y μ la masa reducida del sistema tierra-sol

Nótese que

$$\mu = \frac{m_1\, m_2}{m_2(1 + \frac{m_1}{m_2})} = \frac{m_1}{(1 + \frac{m_1}{m_2})}\,, \tag{59}$$

si $m_1 << m_2$ podemos aproximar la fórmula para la masa reducida por

$$\mu = \frac{m_1}{(1 + \frac{m_1}{m_2})} \approx m_1 \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) \tag{60}$$

donde podemos notar facilmente que si $m_2 = 100\, m_1$ el error al cambiar μ por m_1 es solo de una centésima.

Ejemplo 6 *En el caso del sistema tierra sol, el cociente M_T/M_O tiene el valor 3×10^{-6} de manera que la masa reducida del sistema tierra sol es igual a la masa de la tierra con una precisión de tres partes por un millón. Para el sistema tierra-luna, por otra parte, la masa reducida es igual a la masa de la luna con un error de una parte en cien.*

El valor de la masa reducida del sistema tierra sol y la posición del centro de masa de este mismo sistema que hemos presentado en este capítulo justifican la aproximación del movimiento planetario en el sistema solar como un movimiento alrededor del sol.

7. Ejemplos

7.1. ¿Como calcular un diferencial de volumen I? (el caso plano)

El problema del cálculo de un elemento de volumen puede ser relaivamente complicado a menos que uno esté utilizando un sistema de coordenadas ortogonales como el cartesiano o el sistema de coordenadas polares.

En el primer caso (coordenadas cartesianas) podemos imaginar al plano dividido en pequeños rectángulos de lados $dx\ dy$ y por lo tanto el elemento infinitesimal de área correspondiente es obviamente

$$d\,A = dx\,dy\,, \tag{61}$$

otra manera de ver que esta es el área es considerar un par desplazamientos en el plano dados por los vectores $\vec{v}_x = dx\,\hat{i}$ y $\vec{v}_y = dx\,\hat{i}$ y recordar que el área del paralelogramo generado por stos dos vectores es

$$d\,A = |\vec{v}_x \times \vec{v}_y| = |dx\,\hat{i} \times \; dy\,\hat{j}| = dx\,dy \tag{62}$$

De acuerdo con esto, en el plano coordenado cartesiano la masa de un elemento infinitesimal ede superficie es

$$d\,m = \sigma\,dx\,dy \tag{63}$$

donde σ es la notación usual para la densidad de masa por unidad de area.

El segundo caso de interés es el de las coordenadas polares, este sistema hay dos desplazamientos infinitesimales para considerar (piense en el vector de desplazamiento infinitesimal más general posible: $d\,\vec{r} = dr\hat{u}_r + r\,d\theta\,\hat{u}_\theta$), los radiales dados por $\vec{v}_r = dr\,\hat{u}_r$, y los desplazamientos tangentes a los círculos coordenados dados por $\vec{v}_\theta = r\,d\theta\,\hat{u}_\theta$ debido a lo cual, el área del pequeño rectángulo formado por estos desplazamientos infinitesimales es

$$d\,A = |dr\,\hat{u}_r \;\times\; r\,d\theta\,\hat{u}_\theta| = r\,dr\,d\theta \tag{64}$$

Si le agrada una representación más gráfica del asunto piense que el sistema de coordenadas polares divide al plano en circulos concéntricos y semirectas radiales -asociadas con el ángulo θ-. Las semirectas radiales son ortogonales a los círculos y por lo tanto un elemento infinitesimal de área es un rectangulo de lados $ds_r = dr$ y $ds_\theta = r\,d\,\theta$ lo que al calcular el área del pequeño rectángulo formado por estos lados nos lleva al resultado anterior.

7.2. Cálculo de centros de masas de figuras planas

Ejemplo 7 *Encuentre la posición del centro de masa de una lámina cuadrada homogéneo de masa M y lado a.*

Lo primero que salta a la vista en este ejemplo es que la simetría del objeto, que garantiza que el centro de masa coincide con su centro geométrico, si colocamos un sistema de coordenadas cartesianas en dicho punto resultará

$$\vec{R}_{CM} = 0, \tag{65}$$

por otra parte, si colocamos el origen de coordenadas de tal manera que los vértices del cuadrado estén en los puntos $(0,0)$, $(a,0)$, $(0,a)$ y (a,a) la posición del centro de masa será

$$\vec{R}_{CM} = \frac{a}{2}\left(\hat{\imath} + \hat{k}\right) \tag{66}$$

Es instructivo realizar el cálculo explícito con las herramientas que se introdujeron al principio de esta sección; como ya sabemos, la posición del centro de masas del objeto se calcula como

$$\begin{aligned} \vec{R}_{CM} &= \frac{1}{M}\int_{objeto}\left\{\hat{\imath}\,x\,dm + \hat{\jmath}\,y\,dm\right\} = \\ &= \frac{1}{M}\left\{\hat{\imath}\int_{objeto} x\,dm + \hat{\jmath}\int_{objeto} y\,dm\right\} = \\ &= \frac{1}{M}\left(\hat{\imath}\,\mathcal{I}_1 + \hat{\jmath}\,\mathcal{I}_2\right). \end{aligned} \tag{67}$$

donde los pares (x,y) son las coordenadas de cada elemento diferencial de masa.

Llevaremos adelante el cálculo en el segundo sistema de referencia que describimos al principio del ejemplo, de esta manera, las integrales que deben calcularse son:

$$\mathcal{I}_1 = \sigma\int_0^a dx\int_0^a dy\,x \quad y \quad \mathcal{I}_2 = \sigma\int_0^a dx\int_0^a y\,dy \tag{68}$$

donde $\sigma = M/a^2$ es la densidad de la lámina (que hemos supuesto homogénea). El cálculo es inmediato y se obtiene:

$$\mathcal{I}_1 = \sigma \, \frac{a^3}{2} = \mathcal{I}_2 \tag{69}$$

sustituyendo el valor de σ y llevando todo a la fórmula (67) obtenemos efectivamente

$$\vec{R}_{CM} = \frac{a}{2} \, \left(\hat{\imath} + \hat{k}\right) \tag{70}$$

Ejemplo 8 *En este ejemplo vamos a calcular la posición del centro de masa de una lámina semicircular de radio R.*

Para realizar el cálculo utilizaremos un sistema de coordenadas polares cuyo centro coincida con el centro del semidisco, y consideraremos que este está colocado en la región $y > 0$ del plano. Esta vez reescribiremos la posición general del centro de masa en la forma

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int_{objeto} \vec{r} \, dm \tag{71}$$

donde $\vec{r}$ es la posición del elemento de masa dm; debido al uso de las coordenas polares el elemento de masa se expresa en la forma

$$dm = \sigma \, r \, dr \, d\theta \tag{72}$$

donde $\sigma = \frac{2{,}M}{\pi \, R^2}$ es la densidad del semidisco. Por otra parte, sabemos que

$$\vec{r} = r \, (cos\theta \, \hat{\imath} + sen\theta \, \hat{\jmath}) \tag{73}$$

y por lo tanto la posición del centro de masa se expresa como

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sigma}{M} \, \left(\hat{\imath} \, \mathcal{I}_1 + \hat{\jmath} \, \mathcal{I}_2\right) \tag{74}$$

donde

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^{\pi} d\,\theta \int_0^{R} dr\, r^2\, cos\theta \quad y \quad \mathcal{I}_2 = \int_0^{\pi} d\,\theta \int_0^{R} dr\, r^2\, sen\theta \tag{75}$$

el cálculo de las integrales es elemental y resulta

$$\mathcal{I}_1 = 0 \quad y \quad \mathcal{I}_2 = 2\,\frac{R^3}{3} \tag{76}$$

sustituyendo en $\vec{R}_{CM}$ *obtenemos finalmente*

$$\vec{R}_{CM} = \frac{2\,M}{\pi\,R^2}\,\frac{1}{M}\,R^2\,\hat{\jmath} = \frac{4}{3\pi}\,R\,\hat{\jmath} \tag{77}$$

7.3. ¿Como calcular un diferencial de volumen II? (Objetos espaciales)

Como antes las coordenadas cartesianas no hacen más que dividir al espacio en pequeños paralelepípedos elementales de lados dx, dy, dz. Al igual que en el caso plano el elemento de volumen de las coordenadas cartesianas se calcula sin ningún problema, el elemento es sencillamente un cubito de lados dx, dy, dz y por lo tanto el volumen infinitesimal es

$$dv = dx\,dy\,dz \tag{78}$$

Las coordenadas cilíndricas son una extensión al espacio de las coordenadas polares planas. En las coordenadas polares el plano se divide en círculos que e cortan con semirectas (definidas por los ángulos), las coordenadas cilíndricas se construyen con cilídros rectos cuyo eje es el eje z que se cortan con dos tipos de planos, (i) semiplanos que contienen al eje (z) y planos paralelos al plano $x - y$ de manera que las fórmulas de cambio de coordenadas son (la notación usual asigna la letra griega ρ al radio cilíndrico):

$$x = \rho\, cos\phi \tag{79}$$

$$y = \rho\, sen\phi \tag{80}$$

$$z = z \tag{81}$$

Los cortes adecuados de un elemento infinitesimal producen un cubito de lados: $ds_\rho = d\,\rho$, $d\,s_\phi = \rho\, d\,\phi$ y $d\,s_z = dz$ cuyo volumen es

$$dv = \rho\, d\rho\, d\phi\, dz \tag{82}$$

Si prefiere la notación vectorial observe que el desplazamiento infinitesimal en coordenadas cilíndricas está dado por el vector:

$$d\vec{r} = d\rho\, \hat{u}_\rho + \rho\, d\phi\, \hat{u}_\phi + d\, z\, \hat{k} \tag{83}$$

y que por lo tanto el volumen del paralelepípedo formado por los tres desplazamientos ortogonales infinitesimales posibles (radial, tangencial y vertical) está dado por el triple producto:

$$dv = d\vec{s}_\rho . (d\vec{s}_\phi \times d\vec{s}_z) = \rho\, d\rho\, d\phi\, dz \tag{84}$$

Finalmente, el sistema de coordenadas esféricas está definido por el corte de superficies esféricas de radio r con conos rectos de semiángulo θ ($0 < \theta < \pi$) que contienen al origen y cuyo eje de simetría es el eje z, y con planos que definen un ángulo azimutal en el plano $x - y$ que coincide con el ángulo polar plano ϕ ($0 < \phi < 2\,\pi$).

En este caso las fórmulas de cambio de coordenadas son:

$$\begin{aligned} x &= r\,sen\theta\,cos\phi & (85) \\ y &= r\,sen\theta\,sen\phi & (86) \\ z &= r\,cos\theta & (87) \end{aligned}$$

de manera que los diferenciales de longitud que constituyen los lados de un cubito infinitesimal tienen extensión

$$\begin{aligned} d\,s_r &= d\,r & (88) \\ d\,s_\theta &= r\,d\,\theta & (89) \\ d\,s_\phi &= r\,sen\theta\,d\,\phi & (90) \end{aligned}$$

y en consecuencia, el elemento de volumen es

$$dv = r^2\,sen\theta\,dr\,d\theta\,d\phi \tag{91}$$

En forma vectorial, el desplazamiento infinitesimal más general posible descrito en coordenadas esféricas está dado por

$$d\vec{r} = d\,s_r\,\hat{u}_r + d\,s_\theta\,\hat{u}_\theta + d\,s_\phi\,\hat{u}_\phi\,, \tag{92}$$

de donde, el volumen elemental está dado por

$$d\,v = d\vec{s}_r.(d\vec{s}_\theta \times d\vec{s}_\phi) = r^2\,sen\theta\,dr\,d\theta\,d\phi \tag{93}$$

7.4. Cálculo de centros de masas de figuras volumétricas

Ejemplo 9 *Acá queremos calcular la posición del centro de masa de una esfera homogénea de masa M y radio R.*

El centro de masa está localizado en el punto

$$\vec{R}_C = \frac{1}{M}\int_{esfera} \vec{r}\, dv = \frac{\rho}{M}[\hat{i}\int x\, dv + \hat{j}\int y\, dv + \hat{k}\int z\, dv] \tag{94}$$

Examinemos la primera de las integrales, al sustituir la posición x de un elemento de volumen la integral queda como

$$\mathcal{I}_x = \int_{esfera} r\, sen\theta\, cos\phi\, r^2\, sen\theta\, dr\, d\theta\, d\phi = \int_0^{2\pi} cos\phi\, d\phi \int_0^{\pi} sen^2\theta\, d\theta \int_0^R r^3\, dr \tag{95}$$

la primera de las tres integraciones (en el ángulo ϕ) es trivialmente nula (se integra $cos\phi$ en un período completo, y por lo tanto $\mathcal{I}_x = 0$. El resultado para $\mathcal{I}_y$ tambien es cero por razones análogas, mientras que la integración en z también es nula pero vale la pena verla en detalle,

$$\mathcal{I}_z = \int_{esfera} r\, cos\theta\; r^2\, sen\theta\, dr\, d\theta\, d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} cos\theta\;\, sen^2\theta\, d\theta \int_0^R r^3\, dr \tag{96}$$

que termina siendo nula por el factor

$$\int_0^{\pi} cos\theta\, sen\theta\, d\theta = \frac{sen^2\theta}{2}|_0^{\pi} = 0 \tag{97}$$

Ejemplo 10 *Otro ejemplo que vale la pena examinar es una semiesfera homogénea de radio R contenida en el semiespacio $z > 0$. En este caso los cálculos son escencialmente idénticos a los presentados en el ejemplo anterior salvo por los límites de integración. Las integrales $\mathcal{I}_x$ e $\mathcal{I}_y$ son nulas por la integración en ϕ, pero la integración $\mathcal{I}_z$ si que cambia un poco, en efecto,*

$$\mathcal{I}_z = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} cos\theta\, sen\theta\, d\theta \int_0^R r^3\, dr = \frac{\pi}{4}\, R^4 \tag{98}$$

de manera que el reinsertado los factores faltantes resulta:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\rho}{M}\mathcal{I}_z\,\hat{k} = \frac{3\,M}{4\,\pi\,R^3}\;\frac{1}{M}\frac{\pi}{4}\,R^4\,\hat{k} = \frac{3}{16}\,R\,\hat{k} \tag{99}$$

8. Problemas

Problema 1 *¿Cuál es la posición del centro de masa de un sistema de N partículas de masas iguales colocadas en los vértices de un polígono regular de N lados?*

Problema 2 *Encuentre la posición del centro de masa de un hilo homogéneo de masa M y longitud L*

Problema 3 *Discuta el movimiento de un sistema compuesto por dos partículas de masas iguales que se deslizan a lo largo de un riel sin rozamiento y que están unidas por un resorte de longitud natural L y constante k.*