PRÁCTICA DE LABORATORIO **I-05**

EL PÉNDULO

OBJETIVOS

- Estudiar la relación entre el período y la longitud de un péndulo simple.
- Aplicar las técnicas de elaboración de gráficas y ajustes.
- Determinación de la aceleración de la gravedad, *g*.

MATERIALES

1. Cronómetro.
2. Regla.
3. Masa, hilo y soporte para montar un péndulo simple.

TEORÍA

Un péndulo simple es un sistema idealizado que consiste de una masa puntual suspendida por una cuerda inextensible de masa despreciable. Cuando se aparta la masa hacia un lado de su posición de equilibrio y se suelta, el péndulo comienza a oscilar en un plano vertical por la influencia de la gravedad. El movimiento del péndulo es uno de los ejemplos más sencillos del movimiento armónico simple, el cual tiene una gran importancia conceptual por las múltiples aplicaciones a diversas situaciones físicas. Un péndulo fue utilizado para medir pequeños intervalos de tiempo por Galileo Galilei (1564-1642), y, poco después, colegas suyos lo aplicaron para medir el pulso en seres humanos.

A partir de la segunda ley de Newton, podemos escribir la ecuación que describe el movimiento del péndulo, en términos de la masa, m, la longitud, L la aceleración de gravedad g, y el ángulo, θ, que forma el hilo con la vertical:

$$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} + mg sen\theta = 0 \quad (1).$$

Esta ecuación diferencial es un poco complicada de resolver debido al término *sin(*θ*)*. Por tal razón vamos a suponer la aproximación de ángulos pequeños: $sen\theta \approx \theta$ con la cual la ecuación se simplifica a la siguiente expresión:

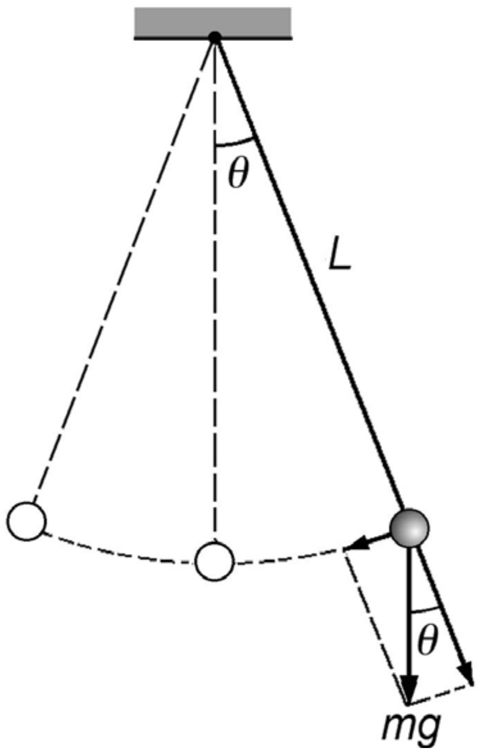

Fig. 1: El péndulo simple

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + (\frac{g}{L})\theta = 0 \quad (2)$$

Esta es una ecuación diferencial lineal ordinaria de segundo orden que caracteriza el movimiento armónico simple y cuya solución es:

$$\theta = \theta_0 sen(\omega t) \quad \text{donde} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (3)$$

Donde ω es la velocidad angular del movimiento armónico simple, y se relaciona con las demás variables de este movimiento, el período *T* y la frecuencia *f* de la siguiente manera:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (4)$$

ACTIVIDADES PRELIMINARES

a) Repase la teoría del péndulo simple y a partir de las Leyes de Newton deduzca la expresión correspondiente al período del péndulo.

b) Calcule aproximadamente el período que se esperaría para las siguientes longitudes del péndulo: 0,25; 1,0 y 2,0 metros.

c) ¿Hasta qué valor máximo de θ, debería Ud. colocar inicialmente el hilo del péndulo para que la aproximación $sen\theta \approx \theta$ sea válida con un error menor que el 1%?

d) Si Ud. puede medir tiempos con un error de ± 0,2 s, y desea un error de 1 % o menos en la determinación del período de un péndulo de 0,5 metros, ¿cuántas oscilaciones deberá contar para obtener la precisión deseada?

PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

Para la realización de esta práctica contamos con un péndulo, una regla y un cronómetro. La experiencia consiste en medir el tiempo que tarda el péndulo para efectuar una oscilación completa, variando el largo del péndulo. El péndulo consta de un soporte que está fijo a la pared donde se ata el hilo que sostiene la masa. Al montarlo asegúrese de que las cuñas que fijan el hilo queden alineadas para que no cambie la longitud efectiva del péndulo.

La masa de este péndulo no es puntual sino que es un cilindro metálico, de modo que la *longitud efectiva L* del péndulo, es la distancia entre el punto A donde se sujeta el hilo hasta el centro de masa C del cilindro. Esta es una consideración importante que deberemos tener en cuenta en el análisis de los datos experimentales. Para analizar correctamente los datos debemos percatarnos de que la longitud efectiva, del péndulo es:

$$L = L_H + L_C \tag{5}$$

donde L_H es la longitud AB del hilo y L_C es la longitud BC entre el centro de masa del cilindro y el punto donde se fija el hilo. La longitud L_H es medida directamente en el experimento, y L_C se determinada con un vernier midiendo la altura *h* del cilindro y suponiendo que éste es un cuerpo homogéneo.

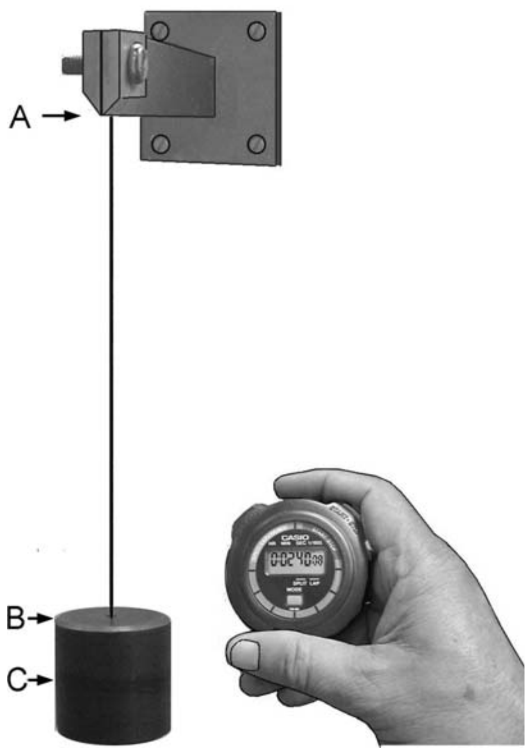

Fig. 2: Arreglo experimental

A. Determinación de la aceleración de la gravedad a partir de las mediciones del período del péndulo para varias longitudes

A1. Seleccionen cinco longitudes del hilo uniformemente repartidas entre la longitud máxima que le puede dar al hilo y un quinto de esa longitud máxima. Para cada longitud midan tres veces el intervalo de tiempo para obtener cincuenta oscilaciones completas del péndulo. Elaboren una tabla como se indica a continuación.

Tabla 1

Longitud del hilo	L_{H1}	L_{H2}	....	L_{H5}
Medidas de $50T$			....	
			....	
			....	
Promedio: $< 50T >$			....	
Error: $\Delta < 50T >$			....	
Período T				
Error: ΔT				

A2. Tomando como referencia la ecuación (4): $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, con los datos anteriores hagan el gráfico del cuadrado del período vs. la longitud efectiva del péndulo.

Primero que nada midan la distancia L_C, y elabore en la hoja de cálculo una tabla como la que se indica a continuación:

Tabla 2

Longitud del péndulo: $L_i = L_{Hi} + L_C$	L_1	L_2	....	L_5
Período al cuadrado: T^2			....	
Error : $\Delta(L_i)$			....	
Error: $\Delta(T^2)$				

Hagan un ajuste de mínimos cuadrados a una recta, forzando que la recta pase por cero, e incluya las barras de error para cada punto del gráfico.

A3. A partir de la pendiente resultante del ajuste, determine la gravedad, *g*, con su respectivo error. ¿Cómo se compara con el valor local de la gravedad (9,777828 m/s^2)?

A4. El análisis anterior de los datos para la determinación de *g* fue relativamente sencillo y directo, y fue posible realizarlo porque existía la posibilidad de determinar la longitud del péndulo sumando las dos distancias que la conformaban.

Si no hubiese sido posible determinar la ubicación del centro de masa del peso del péndulo, también podríamos dar una interpretación de los datos experimentales con un análisis ligeramente más complicado.

Si en la ecuación (4) se reemplaza la longitud efectiva del péndulo de acuerdo a la relación (5) se obtiene:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{L_H + L_C}{g} = (\frac{4\pi^2}{g})L_H + (\frac{4\pi^2}{g})L_C \tag{6}$$

Dado que L_C es una constante en todas las mediciones, se tiene que T^2 depende efectivamente de la longitud del hilo L_H. De esta forma, en la gráfica representativa de T^2 vs L_H, la relación funcional entre las variables es de nuevo una recta de *pendiente* $(4\pi^2/g)$, pero que tiene ahora un i*ntercepto* igual a $(4\pi^2 L_C/g)$.

A5. Construyan una tabla como la que se indica a continuación:

Tabla 3

Longitud del Hilo	L_{H1}	L_{H2}	....	L_{H5}
Periodo al cuadrado: T^2			....	
Error: $\Delta(L_H)$			....	
Error: $\Delta(T^2)$				

Hagan un gráfico de T^2 vs L_H, con barras de error, y un ajuste de mínimos cuadrados a una recta, sin la condición de que pase por cero. Con los parámetros del ajuste obtenidos, determine el valor de la aceleración de gravedad y la distancia L_C del centro de masa, con sus respectivos errores.

Comparen el valor de a aceleración de gravedad con el obtenido en *A3* y el valor de L_C con el valor medido con el vernier.

A6. En el primer análisis de datos teníamos un solo parámetro de ajuste e imponíamos la condición física de que cero longitud debía tener cero período. En el segundo análisis de datos tenía dos parámetros de ajuste, la pendiente y el intercepto. Con frecuencia ocurre que, a mayor número de parámetros a ser ajustados, los análisis de datos dan una calidad de ajuste mejor, pero no necesariamente se corresponde con mejores resultados desde el punto de vista físico. Por otro lado, el considerar más de una variable para el ajuste nos permite detectar un error sistemático.

Por ejemplo, si la distribución de masas del objeto que servía de peso en el péndulo no hubiese sido homogénea, nuestra estimación de la ubicación del centro de masa hubiese sido errónea. Este error sistemático se pone de manifiesto en el ajuste con dos parámetros y es enmascarado en el ajuste que obliga la curva a pasar por cero. ¿Cuál de las dos situaciones es la que se aplica, depende del caso en consideración?

Para ilustrar esta situación ensayemos ahora un ajuste con una curva de potencia, es decir, del tipo: $T = c\ L^n$, donde la constante c y el exponente n son ahora los dos parámetros a ajustar. Para esto proceda como se indica a continuación:

A7. Construyan una tabla como la que se indica a continuación:

Tabla 4

Longitud del péndulo $L_i = L_{Hi} + L_C$	L_1	L_2	....	L_5
Período: T			....	
Error : $\Delta(L_i)$			....	
Error: $\Delta(T)$				

Hagan un gráfico de T vs L, con barras de error y un ajuste de mínimos cuadrados a una curva potencial.

Comparen el valor del exponente con el de la relación del período en función de la longitud del péndulo (Ec. 4)

Determinen de la constante c del ajuste, el valor de la aceleración de gravedad.

A8. Por último, construyan una tabla con los valores de *LogL* y *LogT* como se indica a continuación:

Tabla 5

Longitud del péndulo:	L_1	L_2	....	L_5
LogL (m)			....	
LogT(s)			....	

Aplicando el ajuste de mínimos cuadrados con regresión lineal, comparen los parámetros obtenidos con los términos que se obtienen al aplicar logaritmos en la ecuación 4 y del término independiente calculen el valor de la aceleración de gravedad

A9. Como conclusión de este trabajo, construyan una tabla comparativa con los diferentes valores obtenidos para la aceleración de gravedad y discutan las bondades y limitaciones de cada uno de ellos.

REFERENCIAS

1. D. Halliday, R. Resnick y K. Krane, *Física*, Vol. 1, Cap. 6, Ed. Continental (1995).
2. http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/pendulo2/pendulo2.htm
3. http://www.walter-fendt.de/ph11e/pendulum.htm