

OSCILACIONES ELÉCTRICAS AMORTIGUADAS

OBJETIVOS

- Estudiar las oscilaciones eléctricas amortiguadas de un circuito serie R-L-C.
- Medir la frecuencia y el tiempo de relajación de las oscilaciones.
- Determinar la resistencia crítica del circuito.

MATERIALES

1. Generador de onda cuadrada.
2. Osciloscopio de dos canales.
3. Multímetro.
4. Tablero de conexiones conteniendo los elementos L y C.
5. Caja de décadas de resistencias.
6. Cables de conexión.

TEORÍA

En cualquier circuito en que se pueda almacenar energía, mediante condensadores cargados o bobinas con corrientes, si aplicamos o desconectamos bruscamente una fuente de voltaje, existe un período de tiempo durante el cual el circuito se adapta a las nuevas condiciones y después del cual los cambios tienden a desaparecer. Estos efectos temporales se denominan *transitorios* y se distinguen de los efectos *estacionarios* donde las corrientes tienen amplitudes estables. En este experimento analizaremos el régimen transitorio de un circuito RLC, cuyo comportamiento es

enteramente análogo a sistemas mecánicos, tanto desde el punto de vista físico como en su análisis matemático.

Régimen transitorio de un circuito serie RLC

Consideremos el circuito serie RLC, en el cual se aplica una diferencia de potencial constante V_0 en el instante inicial.

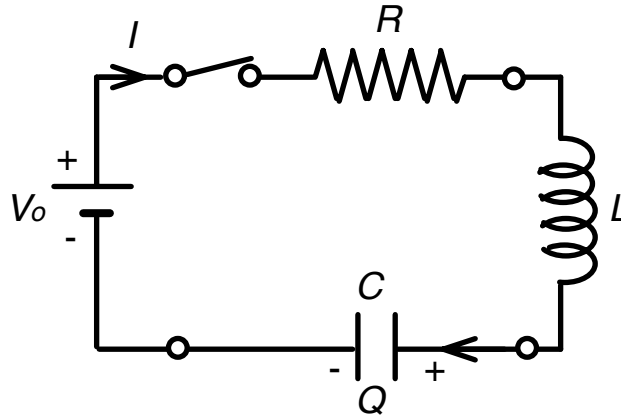


Fig. 1: Circuito serie RLC

Aplicando la regla de los voltajes de Kirchhoff, se tiene:

$$V_R + V_L + V_C = V_0$$

$$RI + L\left(\frac{dI}{dt}\right) + \frac{Q}{C} = V_0$$

Reemplazando la corriente en términos de la carga en el condensador ($I = dQ/dt$) se tiene:

$$L\left(\frac{d^2Q}{dt^2}\right) + R\left(\frac{dQ}{dt}\right) + \frac{Q}{C} = V_0$$

Esta ecuación diferencial tiene una solución particular $Q = Q_0 = CV_0$ que corresponde al valor de la carga del condensador transcurrido un tiempo muy grande, y la corriente se hace cero.

Para hallar la solución general de $Q(t)$, consideremos la función complementaria que es solución de la ecuación:

$$L\left(\frac{d^2Q}{dt^2}\right) + R\left(\frac{dQ}{dt}\right) + \frac{Q}{C} = 0$$

la cual sugiere una solución del tipo exponencial: $Q = Ae^{\lambda t}$. Sustituyéndola en la ecuación diferencial, hallamos:

$$(L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C})Q = 0$$

La cantidad entre paréntesis debe cumplir con la siguiente ecuación cuadrática:

$$L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0$$

la cual arroja dos valores para el parámetro λ :

$$\lambda = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Por lo tanto, la solución dependiente del tiempo es del tipo:

$$Q(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

siendo A y B constantes que se determinan de las condiciones iniciales $I = 0$ y $Q=0$ cuando $t = 0$. Podemos escribir esta expresión en la forma:

$$Q(t) = e^{-\beta t} [Ae^{\gamma t} + Be^{-\gamma t}]$$

donde hemos sustituido: $\lambda = (-\beta \pm \gamma)$, siendo:

$$\beta = \frac{R}{2L}$$

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Se observa que el comportamiento de la carga del condensador depende de los valores relativos de las constantes dentro de la raíz cuadrada y podemos distinguir tres casos:

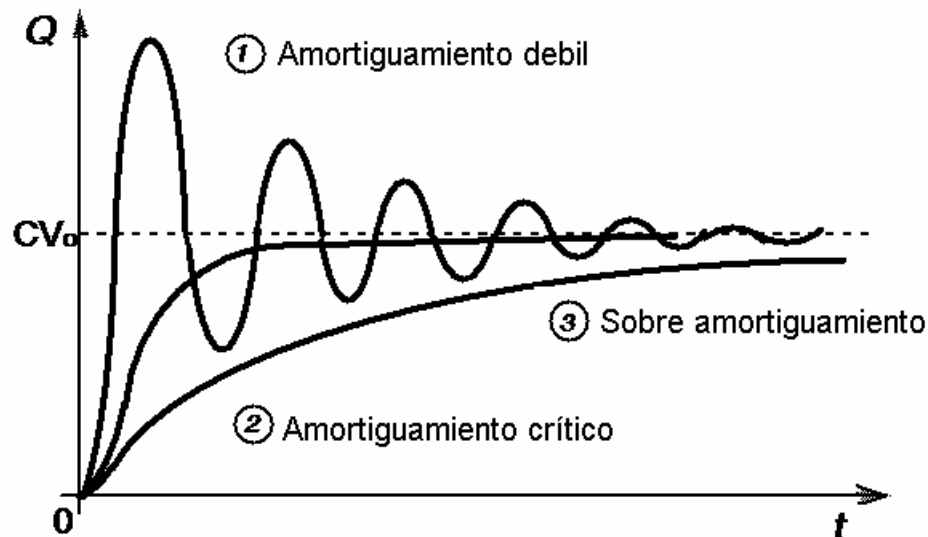


Fig. 2: Los tres casos de amortiguamiento

① **Amortiguamiento débil** ($R^2 < 4L/C$): En este caso γ es una cantidad imaginaria y se tiene:

$$Q(t) = e^{-\beta t} [Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}]$$

Por lo tanto, la expresión completa para la carga del condensador puede escribirse en la forma:

$$Q = CV_0 + CV_{\text{máx}} e^{-\beta t} \cos[\omega t + \delta]$$

donde la amplitud del voltaje del condensador, $V_{\text{máx}}$ y la fase δ son constantes. La carga del condensador oscila alrededor de su valor final $Q_0 = CV_0$, con una amplitud que decae en el tiempo. La frecuencia angular de oscilación ω es:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

Se observa que esta frecuencia es inferior a la *frecuencia natural* de oscilación del circuito:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

La amplitud de las oscilaciones va disminuyendo en el tiempo con una constante de tiempo característica o *tiempo de relajación* τ :

$$\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{2L}{R}$$

② **Amortiguamiento crítico** ($R^2 = 4L/C$): En este caso la constante γ es cero y la carga alcanza su valor final en el menor tiempo posible, pero sin llegar a oscilar. Este caso es de particular interés ya que, cuando un circuito o sistema mecánico es sacado de equilibrio por alguna perturbación y se desea que se recupere lo más pronto posible, sus parámetros deben ser ajustados para producir el amortiguamiento crítico.

③ **Sobre amortiguamiento** ($R^2 > 4L/C$): En este caso la constante γ es una cantidad real y la carga del condensador se acerca a su valor final de equilibrio en forma exponencial y de una manera mucho más lenta que en el caso del amortiguamiento crítico.

ACTIVIDADES PRELIMINARES

Balance energético: Considerando de nuevo la ecuación diferencial para la carga del condensador en circuito *RLC*:

$$L \left(\frac{d^2Q}{dt^2} \right) + R \left(\frac{dQ}{dt} \right) + \frac{Q}{C} = V_0$$

Si multiplicamos ambos lados de la ecuación por la corriente, $I = dQ/dt$, ésta queda expresada de otra manera. Al hacer esto, rescriba cada término de manera que sea evidente que:

- 1) el primer término representa la variación temporal de energía en la bobina L
- 2) el segundo término es la potencia disipada por efecto Joule en la resistencia R
- 3) el tercero es la variación temporal de la energía en el condensador C

Con ello demuestre que la tasa a la cual la batería suministra energía ($V_0 I$) es igual a la tasa de disipación de energía en la resistencia más la suma de las tasas de almacenamiento de energía entre la bobina y el condensador.

PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

*En este experimento utilizaremos un generador de funciones de frecuencia variable con el cual se operará en el modo de onda cuadrada $\square$. De esta manera el generador funcionará como una batería en serie que impulsa periódicamente el oscilador *RLC*.*

Escoja el terminal de salida del generador que tiene una resistencia interna $R_i = 50 \Omega$.

Para medir los voltajes en el circuito se emplea un osciloscopio de dos canales y es importante asegurarse de conectar el terminal común de tierra del osciloscopio con el terminal de tierra del generador (símbolo $\perp$). De esta manera todos los voltajes que se midan con las puntas de prueba serán con respecto de este terminal común.

A. Oscilaciones amortiguadas débilmente

- A1.** Escoja uno de los condensadores y una de las bobinas a su disposición y conéctelos en serie con la caja de resistencias (inicialmente a un valor de resistencias bajo, ejemplo 200Ω). Conecte el circuito al generador de ondas de manera que un lado del condensador quede conectado al terminal común de tierra del generador, como indica el esquema experimental siguiente:

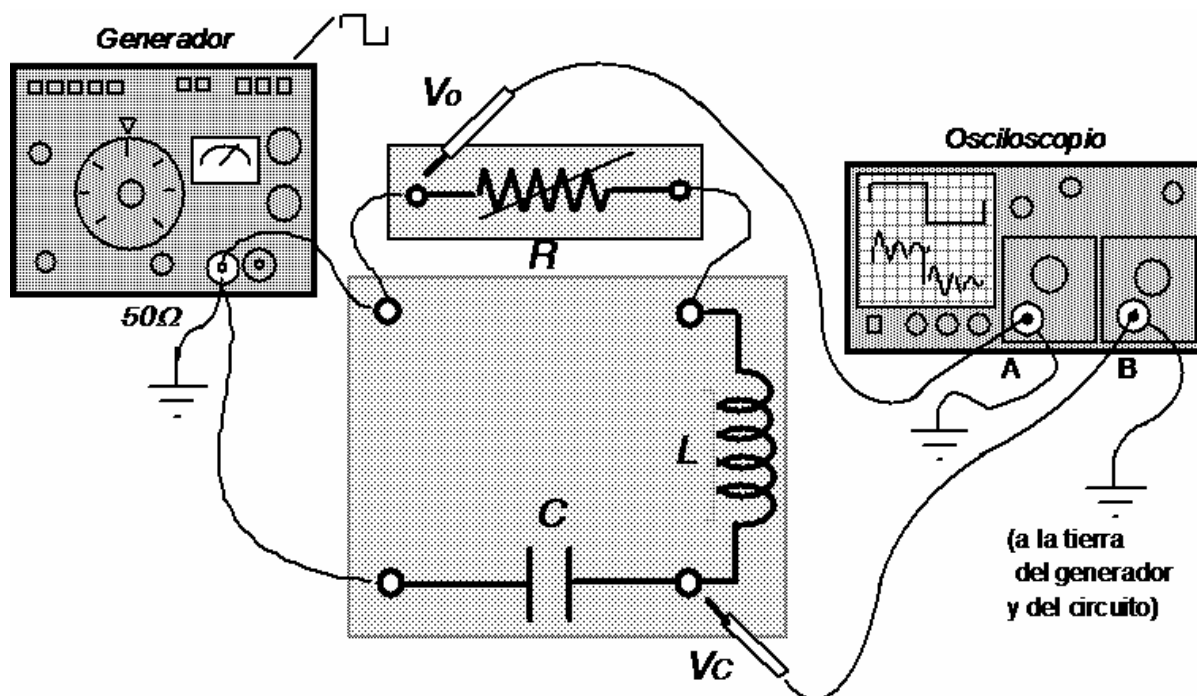


Fig. 3: Montaje experimental

- A2.** Conecte la punta de prueba de un canal del osciloscopio para medir el voltaje V_R del condensador V_C (que es proporcional a la carga) y la del otro canal para observar simultáneamente el voltaje V_o de salida del generador. Ajuste la onda cuadrada del generador a una amplitud suficiente (ejemplo: 0,8 voltios p-p) y con una frecuencia conveniente (ejemplo: 200 Hz) para visualizar en forma completa las oscilaciones libres amortiguadas en el otro canal del osciloscopio.
- A3.** Utilizando la escala de tiempo del osciloscopio, mida el período T de las oscilaciones con la mayor precisión posible. Determine la frecuencia angular de la oscilación $\omega = 2\pi/T$.
- A4.** Para hallar el tiempo de relajación τ utilizaremos dos procedimientos diferentes. En el primer procedimiento, mida la amplitud de las crestas de las ondas sucesivas con la mayor precisión posible. Cada vez que sea necesario hacer un cambio de escala debe verificarse el cero de la traza del osciloscopio y la correspondencia de su lectura, antes y después del cambio. Tome un número no menor de 10 lecturas.
- A5.** Haga un gráfico de las amplitudes máximas de voltaje del condensador $V_{\text{máx}}$ en función del tiempo en cada oscilación. Note que los voltajes de la parte oscilatoria de V_C se miden respecto del nivel V_0 . Utilice una escala logarítmica ($\ln V_C$ vs t). De la pendiente del gráfico obtenga el valor de τ .

- A6.** Un procedimiento práctico que también se utiliza para obtener el tiempo característico τ , aunque es menos preciso que el anterior, consiste en utilizar solamente dos máximos sucesivos de oscilación (separados por un período: $T = 2\pi/\omega = t_2 - t_1$).

En efecto, para cada uno de estos máximos se cumple:

$$V(t_1) = V_{\text{máx}} e^{-t_1/\tau} \cos[\omega t_1 + \delta]$$

$$V(t_2) = V_{\text{máx}} e^{-t_2/\tau} \cos[\omega t_2 + \delta]$$

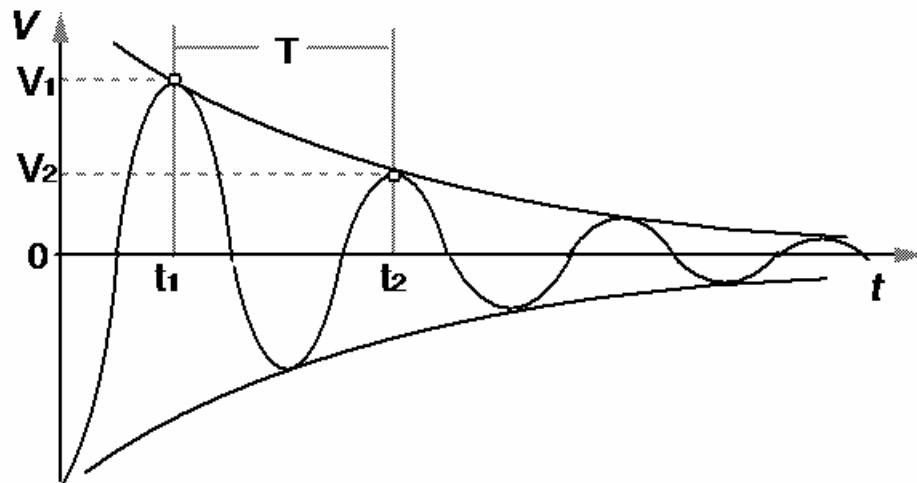


Fig. 4: Oscilaciones amortiguadas débilmente

Como los máximos son consecutivos: $\cos[\omega t_2 + \delta] = \cos[\omega t_1 + \delta]$, dividiendo una expresión por la otra y tomando logaritmos se tiene:

$$\tau = \frac{T}{\ln \left[\frac{V(t_1)}{V(t_2)} \right]}$$

Proceda a medir de nuevo el tiempo de relajación "aproximado" mediante este segundo procedimiento y compárelo con el valor obtenido de manera más precisa usando el primer método.

- A7.** Calcule los *valores teóricos* de ω y τ determinados por los elementos del circuito y compárelos con los valores obtenidos experimentalmente, tomando en cuenta los errores en sus determinaciones.

Recuerde que la resistencia R en las expresiones teóricas es la resistencia total serie, la cual incluye: la resistencia interna del generador, la resistencia de la

bobina y la de la caja de resistencias. Puede medirse directamente con el multímetro.

- A8.** Aumente la resistencia de la caja (a un valor que permita seguir observando las oscilaciones amortiguadas) y sin modificar los otros componentes del circuito, repita los pasos del **A3** al **A7**.

B. Amortiguamiento crítico y sobreamortiguamiento

- B1.** Aumente la resistencia de la caja hasta observar el amortiguamiento crítico. Trate de ajustar cuidadosamente la resistencia para determinar con la mayor precisión la situación crítica en que justamente desaparece la oscilación.

Determine la resistencia crítica del circuito, la cual incluye la resistencia interna del generador, la resistencia de la bobina y la de la caja de resistencias. Puede medirse directamente con el multímetro.

- B2.** Tomando en cuenta los errores en sus mediciones, compare el valor experimental de la resistencia crítica con el valor obtenido de la expresión teórica, conocidos los valores de L y C .

- B3.** Aumente la resistencia de la caja para obtener algún valor superior a la resistencia crítica. Dibuje la forma de la señal observada en el osciloscopio y explique sus observaciones.

PREGUNTAS

Analogías electromecánicas: El dibujo muestra un sistema mecánico que consiste en un pistón de masa M acoplado a un resorte de constante k , los cuales están dentro de un cilindro lleno de aceite. Cuando se aplica una fuerza impulsiva F se produce un movimiento rectilíneo del pistón. Suponga que el aceite ofrece una fuerza de fricción viscosa que es proporcional a la velocidad instantánea del pistón $F_{roce} = bv$.

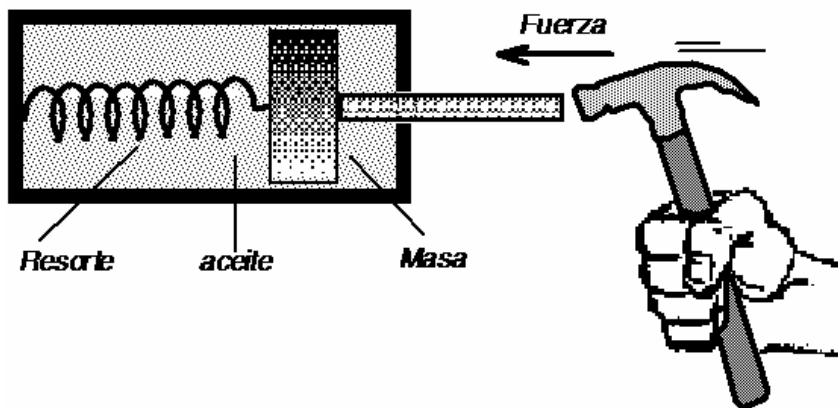


Fig. 5: Oscilaciones mecánicas amortiguadas

a) Establezca, en la siguiente tabla, las analogías de los elementos de este sistema mecánico con los elementos del circuito eléctrico serie LRC.

<i>Cantidad eléctrica</i>	<i>Unidades</i>	<i>Cantidad mecánica</i>	<i>Unidades</i>
Inductancia L	..		
Capacitancia C	..		
Resistencia R	..		
Voltaje V	Voltios		
Carga Q	..		
Corriente I	..		

b) Escriba la ecuación diferencial que describe el desplazamiento $X(t)$ del pistón desde su posición de equilibrio.

c) Escriba las condiciones para los tres tipos de amortiguamiento mecánico.

d) Diseñe un sistema mecánico que tenga las mismas características de frecuencia y amortiguamiento crítico del circuito eléctrico estudiado (escoja los valores de constante elástica k del resorte, masa M del pistón y constante b de fricción).

REFERENCIAS

1. Berkeley Physics Laboratory, *Part A - Laboratory Physics*, Mc Graw-Hill (1964).
2. R. M. Eisberg y L. S. Lerner, *Física*, Vol. 2, Cap. 26, Mc Graw-Hill (1984).