PRÁCTICA DE LABORATORIO **II-11**

RESONANCIA ELÉCTRICA

OBJETIVOS

- Estudiar la respuesta de frecuencia de un circuito serie R-L-C.
- Determinar la frecuencia de resonancia y el factor de calidad.
- Estudiar la influencia del valor de R sobre el factor de calidad.

MATERIALES

1. Generador de frecuencia variable.
2. Osciloscopio de dos canales.
3. Tablero de conexiones conteniendo los elementos L, R y C.
4. Cables de conexión.

TEORÍA

La resonancia es un fenómeno que tiene aplicaciones muy importantes en diversos campos de la física y la tecnología. Quizás la más común aplicación de la resonancia es como selector de frecuencia. La resonancia está presente cuando ajustamos la frecuencia natural de oscilación de un circuito receptor hasta igualarla a la frecuencia de las ondas de una estación de radio o TV. En este proceso estamos desechando una gran cantidad de señales de otras estaciones recibidas por la antena, al quedar fuera de resonancia y así seleccionamos únicamente la frecuencia de la estación que deseamos sintonizar. En este experimento analizaremos la resonancia de un circuito sencillo constituido por una bobina, un condensador y una resistencia conectados en serie.

A. Respuesta de frecuencia de un circuito serie RLC

Consideremos el circuito serie R-L-C alimentado por una fuente de variación periódica con el tiempo: $V(t) = V_o \cos\omega t$. De acuerdo con la regla de Kirchhoff, la suma de los voltajes: (1) en la bobina $L(dI/dt)$, (2) en la resistencia (IR) y (3) en el condensador (Q/C), es igual al voltaje total aplicado ($V_o \cos\omega t$). Por lo tanto se cumple la ecuación diferencial:

$$L\left(\frac{dI}{dt}\right) + RI + \frac{Q}{C} = V_0 \cos \omega t$$

La solución general para la corriente I (t) es la superposición de una parte transitoria que decae en el tiempo y una parte estacionaria que oscila a la misma frecuencia de la fuente. Una vez transcurrido un tiempo suficientemente largo la solución transitoria es despreciable y basta considerar sólo la solución estacionaria.

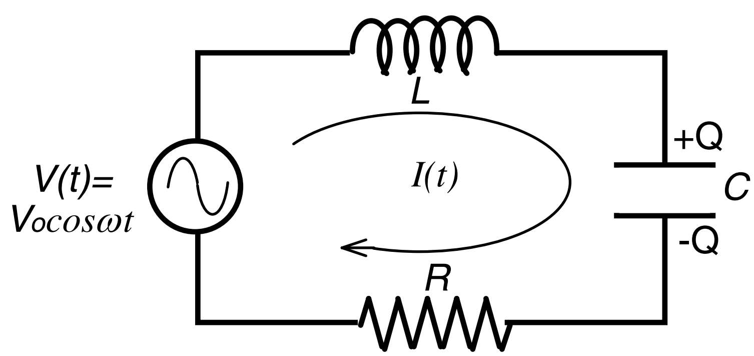


Fig. 1: Circuito serie R-L-C

Para analizar los circuitos de corriente alterna con elementos lineales, una técnica muy útil consiste en representar las cantidades físicas involucradas en notación compleja. Por ejemplo, el voltaje de la fuente puede representarse como:

$$\hat{V}(t) = V_o e^{i\omega t}$$

Esta cantidad compleja se llama un *fasor* y puede visualizarse gráficamente como vector que rota en el plano complejo a la frecuencia angular ω. Después de operar matemáticamente sobre los fasores, podemos recuperar las correspondientes cantidades físicas, proyectándolos sobre el eje real. Es decir:

$$V(t)\ (\text{físico}) = \text{Re}\{\hat{V}\} = \text{Re}\{V_o e^{i\omega t}\} = V_o \cos\omega t$$

Para hallar la corriente I(t) = dQ/dt, derivamos la ecuación diferencial anterior respecto del tiempo.

$$L\left(\frac{d^2\hat{I}}{dt^2}\right) + R\left(\frac{d\hat{I}}{dt}\right) + \frac{\hat{I}}{C} = i\,\omega V_0\, e^{i\,\omega t}$$

Si suponemos que I(t) tiene una variación sinusoidal a la frecuencia angular ω, su representación compleja debe ser de la forma: $\hat{I}(t) = \hat{I}_o e^{i\omega t}$. Así, cualquier diferencia de fase entre la corriente y el voltaje está incluida en la constante compleja $\hat{I}_o$. Sustituyendo $\hat{I}(t)$ y sus derivadas en la expresión anterior:

$$\left(-\omega^2 L\hat{I}_o + i\omega R\hat{I}_o + \frac{\hat{I}_o}{C}\right)e^{i\omega t} = i\omega V_o e^{i\omega t}$$

cancelando los factores exponenciales $e^{i\omega t}$ y despejando $\hat{I}_o$, tenemos:

$$\hat{I}_o = \frac{V_o}{R + i(\omega L - 1/\omega C)} = \frac{V_o}{R + i\,(X_L - X_C)}$$

siendo $X_L + \omega L$ la reactancia inductiva de la bobina y $X_C + 1/\omega C$ la reactancia capacitiva del condensador.

La cantidad en el denominador se denomina *impedancia compleja* y se puede representar mediante:

$$\hat{Z} = R + i\,(X_L - X_C) = Z\,e^{i\delta}$$

El módulo Z viene dado por:

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

y la fase δ viene dada por:

$$\delta(\omega) = \text{Arctg}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) = \text{Arctg}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

Podemos determinar la constante compleja de la corriente $\hat{I}_o$:

$$\hat{I}_o = \frac{V_o}{\hat{Z}} = \frac{V_o}{Z}e^{-i\delta} = I_o e^{-i\delta}$$

Por lo tanto, la expresión completa para la corriente compleja es:

$$\hat{I} = \hat{I}_o e^{i\omega t} = I_o e^{i(\omega t - \delta)}$$

Finalmente, para recuperar la expresión "física" de la corriente, tomamos la parte real de su representación compleja:

$$I(t) = \mathrm{Re}\{\hat{I}(t)\} = I_o\cos(\omega t - \delta)$$

donde $I_o = V_o/Z$ es la amplitud de la corriente y "δ" representa la diferencia de fase de la corriente respecto del voltaje de la fuente. Estas relaciones se ilustran en el diagrama de fasores mostrado a continuación:

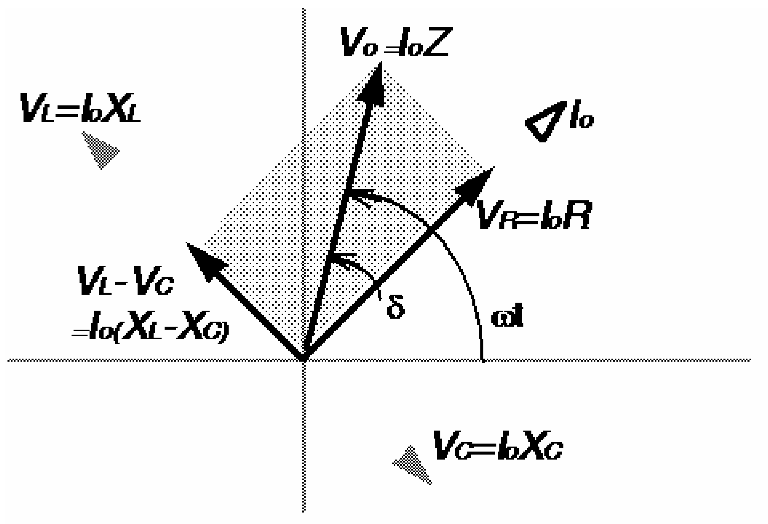


Fig. 2: Diagrama de fasores

B. Resonancia

Si consideramos la expresión para la corriente, tanto su amplitud I_o como su diferencia de fase δ dependen de la frecuencia del voltaje de la fuente. La corriente presenta un máximo cuando $X_L = X_C$ y el circuito se comporta como si la bobina y el condensador no existieran (sus voltajes están 180° fuera de fase y se cancelan). En esta situación la corriente queda limitada únicamente por el valor de la resistencia.

$$I_0(\text{máx}) = \frac{V_0}{R}$$

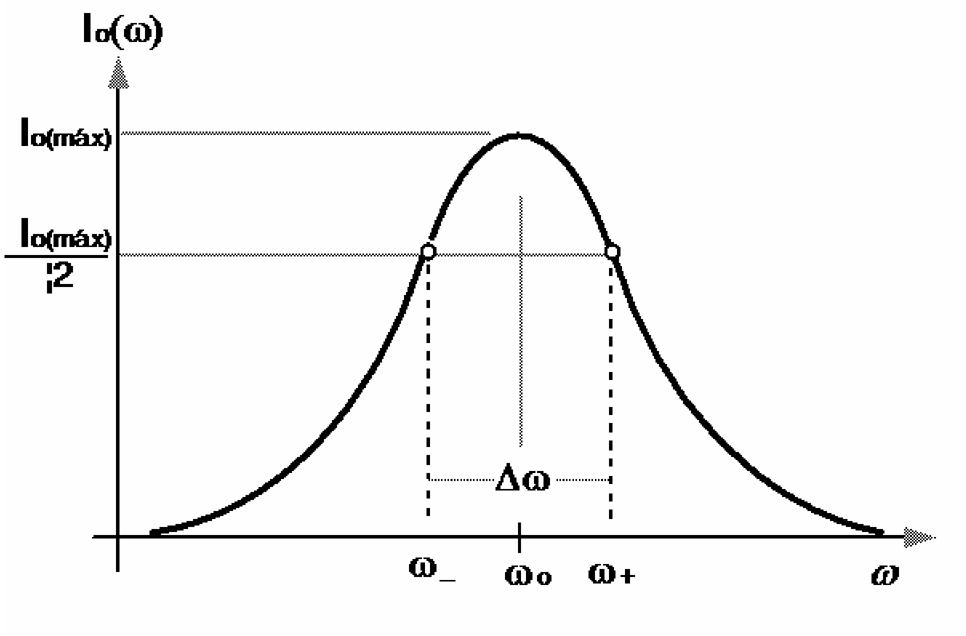


Fig. 3: Amplitud de la corriente en función de la frecuencia angular

Este fenómeno en el cual la respuesta es máxima para un valor particular de la frecuencia de la señal excitadora es conocido como resonancia. La frecuencia de resonancia $\omega = \omega_o$ viene dada por la condición:

$$X_L = \omega L = X_C = 1 / \omega C$$

$$\boxed{\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Otra propiedad importante de la curva de resonancia es su *ancho relativo*. Podemos definir un factor adimensional *Q* (llamado factor de calidad o de mérito) como el inverso del ancho relativo:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \text{Factor de calidad}$$

donde se define el ancho de banda $\Delta\omega = (\omega_+ - \omega_-)$ como la diferencia entre las frecuencias para las cuales, a cada lado de la frecuencia de resonancia ω_0, la amplitud de la corriente se reduce en un factor $\sqrt{2}$ respecto de su valor máximo.

El criterio para esta definición se basa en que cuando la amplitud de la corriente se reduce en un factor $\sqrt{2}$, la potencia disipada en el circuito es justamente "la mitad" de su valor máximo. Por esta razón estas dos frecuencias se denominan de potencia mitad. Las frecuencias angulares ω_+ y ω_- son aquellas en que la reactancia resultante

$|X_L - X_C|$ es numéricamente igual al valor de la resistencia. En efecto, para estos puntos tenemos:

$$Z(\omega\pm) = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{2}\,R$$

De esta manera la amplitud de la corriente es:

$$I_o(\omega\pm) = \frac{V_o}{Z} = \frac{V_o}{\sqrt{2}\,R} = \frac{I_o(\text{máx})}{\sqrt{2}}$$

Hallemos una expresión para el factor de calidad en términos de los valores de los elementos del circuito. Para cada frecuencia de corte se cumple $|X_L - X_C| = R$, es decir:

$$\omega_+ L - \frac{1}{\omega_+ C} = R, \qquad \text{y} \qquad \omega_- L - \frac{1}{\omega_- C} = -R$$

Sumando y restando estas dos relaciones se obtiene:

$$\omega_+ \omega_- = \omega_0^2 \qquad \text{y} \qquad \omega_+ - \omega_- = \frac{2R}{L} - \frac{\omega_+ - \omega_-}{\omega_+ \omega_- LC}$$

Sustituyendo la primera de estas relaciones en la segunda, se obtiene para el ancho de banda:

$$\Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = \frac{R}{L}$$

Por lo tanto, el factor de calidad viene dado por la relación simple:

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0 L}{R}}$$

Cuanto menor es la resistencia R, tanto mayor es el factor de calidad Q (el ancho de banda relativo es menor y la curva de resonancia es más pronunciada y angosta).

Por otra parte, la variación de la frecuencia no sólo influye en la amplitud de la corriente sino también en el desfasaje. De acuerdo a la expresión para $\delta(\omega)$, en resonancia $X_L = X_C$ y $\delta(\omega_o) = 0°$. Es decir:

En resonancia, la corriente en el circuito oscila en fase con el voltaje de la fuente.

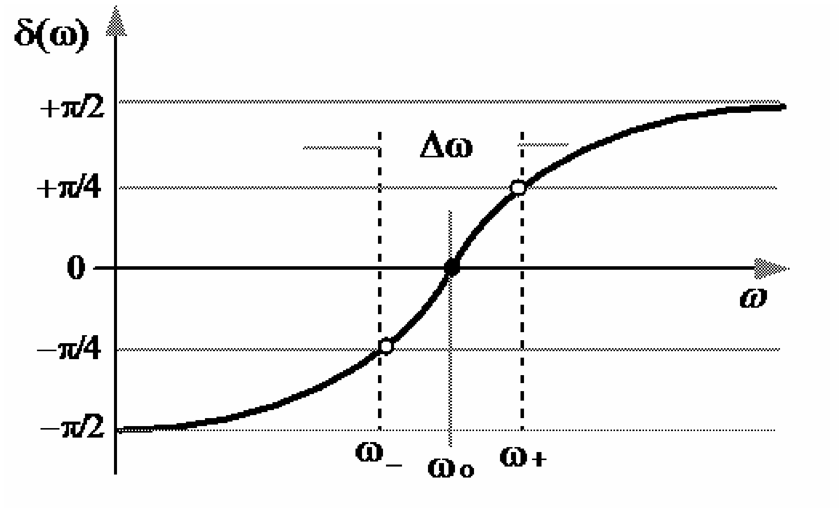


Fig. 4: Angulo de desfasaje de la corriente en función de la frecuencia

Para muy bajas frecuencias ($\omega \ll \omega_0$) la reactancia capacitiva domina ($\delta\varnothing$-$\pi/2$). Mientras que, para altas frecuencias ($\omega \gg \omega_0$), la reactancia inductiva domina ($\delta\varnothing$+$\pi/2$). También resulta interesante que cuando $|X_L - X_C| = R$ y se cumple que:

El desfasaje es $\delta = \pm\pi/4$ para los puntos de corte ($\omega_\pm$) a cada lado de la resonancia.

ACTIVIDADES PRELIMINARES

Resonancia en paralelo: Una resistencia, una bobina y un condensador están conectados en paralelo a una fuente de corriente alterna.

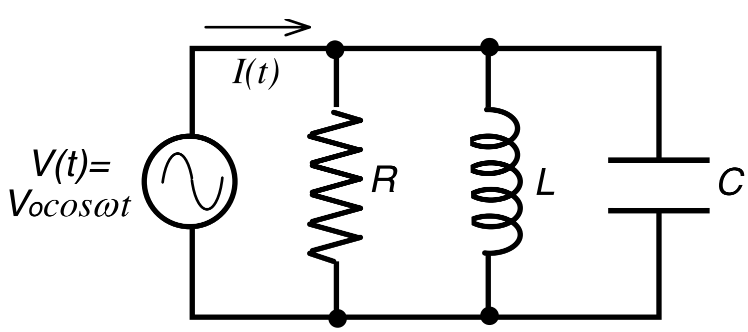


Fig. 5: Circuito paralelo R-L-C

a) Demuestre que la amplitud de la corriente total es:

$$I_o = V_o\sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C - \frac{1}{\omega L})^2}$$

y el ángulo de desfasaje entre la corriente y el voltaje viene dado por:

$$\delta = \text{Arctg}(\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{1/R})$$

b) Dibuje un diagrama de fasores, mostrando las corrientes en los tres elementos.

c) Demuestre que en este caso la resonancia corresponde a $1/X_C = 1/X_L$, lo cual conduce de nuevo a la misma expresión para la frecuencia de resonancia:

$$\boxed{\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Sin embargo, en el circuito resonante paralelo la corriente es un mínimo (en contraste con el circuito serie, en el cual la corriente alcanza un máximo).

PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

A. Determinación de la curva de resonancia

En este experimento utilizaremos un generador de funciones de frecuencia variable el cual se operará en el modo de onda sinusoidal (∿) y su terminal de salida ofrece una resistencia interna $R_i = 50\ \Omega$.

Para medir los voltajes en el circuito se emplea un osciloscopio de dos canales y es importante asegurarse de conectar el terminal común de tierra del osciloscopio con el terminal de "tierra" del generador (símbolo ⏚). De esta manera todos los voltajes que se midan con las puntas de prueba serán referidos a este terminal común.

A1. Escoja uno de los condensadores y una de las resistencias a su disposición. Monte el circuito serie L-R-C a la fuente de manera que un lado de la resistencia quede conectado al terminal común de "tierra" del generador de ondas, como indica el esquema experimental.

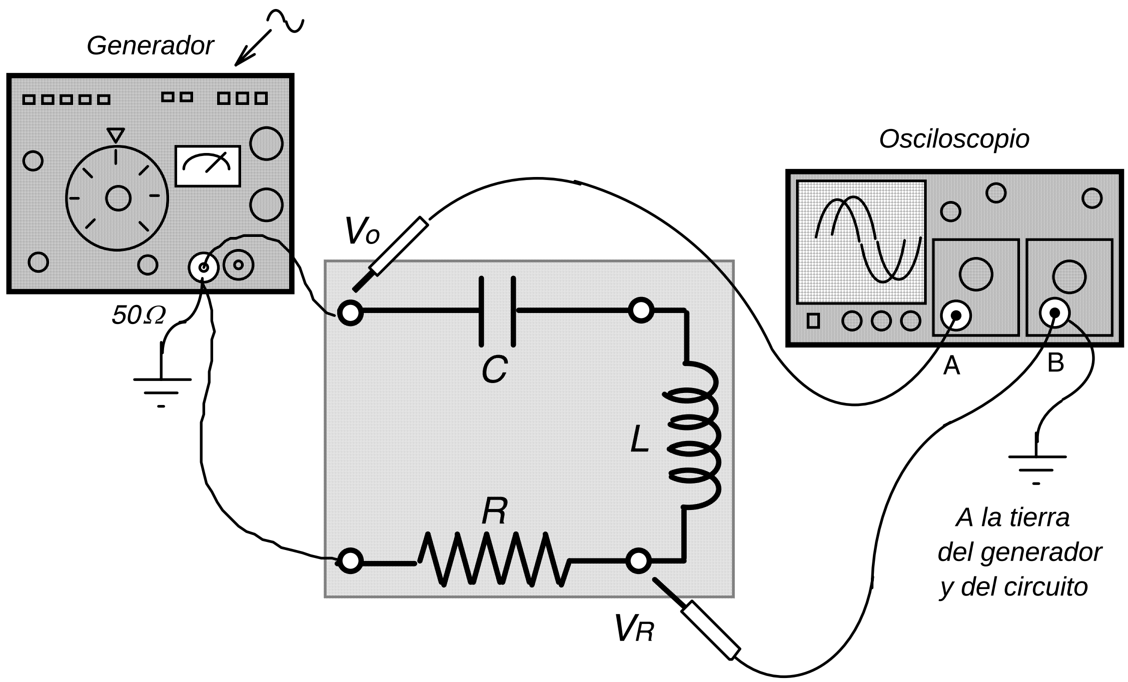


Fig. 6: Esquema del montaje experimental

A2. Conecte la punta de prueba de un canal del osciloscopio para medir el voltaje V_R de la resistencia y la del otro canal, para medir el voltaje V_o de salida de la fuente. Ajuste el voltaje de salida del generador a un valor de 0,8 voltios p-p.

A3. Varíe la frecuencia del generador hasta observar la resonancia en el osciloscopio. Haga una determinación de la condición de resonancia lo más precisa posible, mediante ajuste fino del dial del generador, observando que el voltaje en la resistencia (que es proporcional a la corriente) alcance un máximo y esté en fase con el voltaje de la fuente.

A4. Proceda a medir el voltaje en la resistencia V_R en función de la frecuencia. Para cada frecuencia, asegúrese de reajustar el voltaje del generador, de modo que permanezca constante en el valor previamente escogido. Anote sus resultados en una tabla. Simultáneamente, incluya en la tabla, para cada frecuencia, el desfasaje del voltaje de la resistencia (con su signo correspondiente) respecto al del generador. La tabla debe contener por lo menos veinte puntos bien distribuidos alrededor de la frecuencia de resonancia. Los puntos deben incluir valores por lo menos desde una década antes hasta una década después del valor de la resonancia

A5. El desfasaje del voltaje de la resistencia respecto al del generador se obtiene comparando las dos señales simultáneamente en la escala de tiempo de la pantalla del osciloscopio. El desfasaje δ se determina mediante el corrimiento temporal *t(s)* y el periodo *T(s)* de la señal, y usando la relación de proporcionalidad:

$$\boxed{\delta = \left(\frac{t}{T}\right) 2\pi}$$

A6. Haga el gráfico del voltaje de la resistencia en función de la frecuencia. A partir de la curva determine la frecuencia de resonancia ω_o y el factor de calidad. Compare estos valores con los valores teóricos*.* Superponga la gráfica experimental con la teórica. Observe que, debido al amplio rango de frecuencias de varios ordenes de magnitud, la escala de frecuencia se representa usualmente por conveniencia en forma logarítmica.

.

A7. Note que en la expresión para Q, la resistencia R_{total} es la total en serie en el circuito y es la suma de: la resistencia pura (R) que hemos colocado + la resistencia de la bobina (R_L) + la resistencia interna del generador (R_g = 50Ω).

La resistencia R_L de la bobina *a la frecuencia de resonancia* se puede determinar notando que en esta condición ($X_L - X_C = 0$), y el circuito es puramente resistivo:

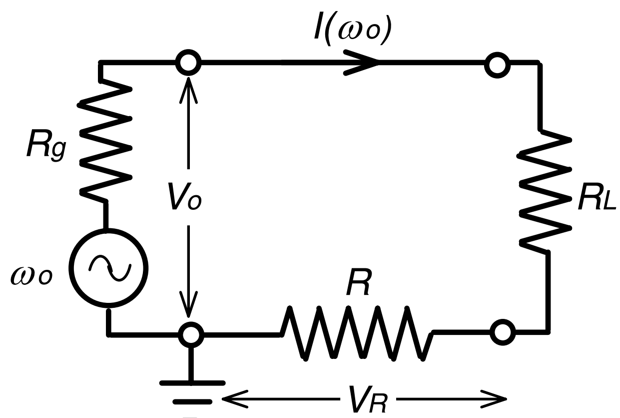


Fig. 7: Circuito equivalente para resonancia

Según este circuito, la resistencia R_L se determina a partir de las medidas del voltaje de la fuente V_o y del voltaje en la resistencia V_R, y conocido el valor de R.

$$I(\omega_o) = \frac{V_o}{R_L + R} = \frac{V_R}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_L = R\left(\frac{V_o}{V_R} - 1\right)}$$

A8. Haga un gráfico de la diferencia de fase δ, entre el voltaje V_R de la resistencia y el de la fuente V_o, en función de la frecuencia. A partir de la curva determine la frecuencia de resonancia, ω_o y el factor de calidad. Compare estos valores con los valores teóricos*.*

B. Medición del factor de calidad para otra resistencia

B1. Cambie la resistencia en serie con la bobina por otra resistencia de distinto valor. Determine de nuevo la frecuencia de resonancia y el factor de calidad Q del circuito. Para la determinación del nuevo Q no se le pide construir la curva de resonancia. Basta con buscar cuidadosamente los valores de frecuencia a cada lado de la resonancia tal que el voltaje en la resistencia caiga a un valor $V_R(\text{máx})/\sqrt{2}$ y la diferencia de fase δ sea $\pm\ \pi/4$.

B2. Tomando en cuenta los errores en sus mediciones, *¿sus resultados están acordes con los que predice la teoría?*

B3. Finalmente, proceda a medir el voltaje en el condensador a la frecuencia de resonancia. Para ello previamente desconecte el circuito anterior y conecte de nuevo los elementos en serie en secuencia C-L-R, de manera que un lado del condensador quede conectado al terminal de tierra de la fuente.

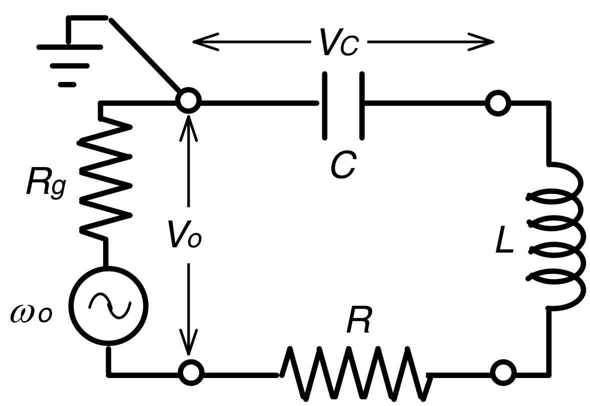


Fig. 8: Circuito serie C-L-R

B4. El voltaje en el condensador a la frecuencia de resonancia ¿puede llegar a ser mucho mayor que el voltaje de la fuente?
Justifique su respuesta incluyendo un diagrama de fasores.

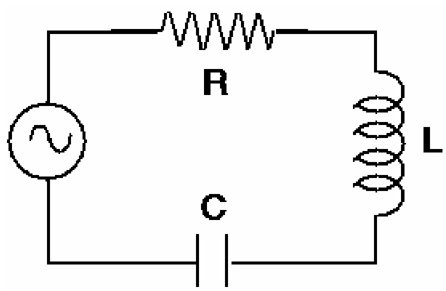
PREGUNTAS

1. Si tenemos dos circuitos serie diferentes: L_1-R_1-C_1 y L_2-R_2-C_2 que tienen una idéntica frecuencia de resonancia $\omega_1 = \omega_2$, y conectamos los seis elementos en serie, ¿cuál será la nueva frecuencia de resonancia del circuito combinado?

2. El comportamiento de la corriente en un circuito serie LRC es análogo a la respuesta de un sistema masa-resorte con amortiguamiento a medida que se varía la frecuencia de una fuerza excitadora. El diseñador de un automóvil debe tomar en cuenta el fenómeno de resonancia. El sistema de muelles juega el papel semejante

al condensador, la masa del automóvil juega un papel semejante a la inductancia y los amortiguadores juegan el papel de la resistencia.
Según su criterio, ¿cómo debería ser la curva de resonancia de un automóvil: aguda y alta o ancha y baja?

3. Considere el circuito serie R - L - C, alimentado por una fuente sinusoidal variable.



¿Cuáles de estas afirmaciones es correcta?

(1) La impedancia aumenta si aumenta L.
(2) La impedancia aumenta si disminuye C.
(3) La impedancia aumenta si aumenta ω.
(4) En resonancia, la fuente no realiza trabajo ya que la energía disipada en R es compensada por la energía almacenada en L y C.
(5) En resonancia, el voltaje en la resistencia es igual al voltaje de la fuente.

REFERENCIAS

1. Berkeley Physics Laboratory, *Laboratory Physics -part A ,* Mc Graw-Hill (1964).

2. R. M. Eisberg y L. S. Lerner, *Física*, Vol. 2, cap. 26, Mc Graw-Hill (1984).