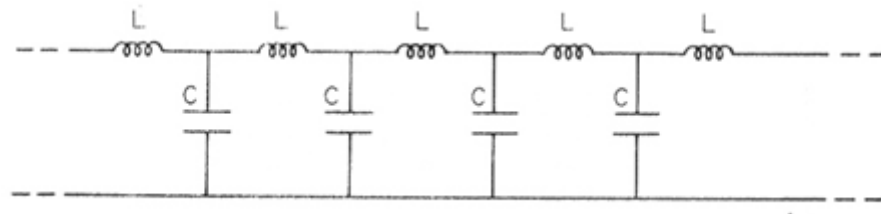


PROPAGACIÓN EN UNA LÍNEA DE RETARDO

OBJETIVO

Es importante señalar que el objetivo central de este experimento es estudiar la propagación de ondas en un medio con condiciones de borde fijas. En tal sentido la línea de retardo LC, permite, no sólo propagar ondas, como típicamente se discute en los cursos básicos de física, sino también relacionar nuestras observaciones con las propiedades del medio. La similitud llega inclusive a permitirnos conectar dichas propiedades con una celda básica, en forma análoga al análisis diferencial que se utiliza comúnmente para describir la propagación de ondas en medios continuos.



La línea de retardo LC

MATERIALES

1. Osciloscopio
2. Generador de pulsos
3. Multímetro
4. Línea de retardo
5. Potenciómetros

FUNDAMENTOS TEORICOS

Dos osciladores acoplados

Para comenzar el estudio de la línea de retardo LC comenzaremos estudiando qué sucede cuando un circuito LC es colocado cercano a otro circuito similar. Es tal situación se pueden inducir las oscilaciones de uno de ellos en el otro circuito como en un sistema de osciladores acoplados.

Existen distintas configuraciones de circuitos acoplados: Acoplamiento por inductor, por inductancia mutua y el caso que nos interesa, por capacitor. Analicemos dos circuitos acoplados por un capacitor, tal y como se muestra en la figura

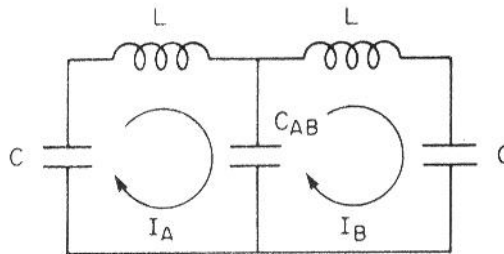


Figura 1: Dos circuitos LC acoplados por un capacitor.

A partir de las relaciones o ecuaciones de Kirchhoff donde el voltaje total en el recorrido de cada una de las mallas es cero.

$$L \frac{d^2 I_A}{dt^2} + \frac{1}{C} I_A + \frac{1}{C_{AB}} [I_A - I_B] = 0$$

$$L \frac{d^2 I_B}{dt^2} + \frac{1}{C} I_B + \frac{1}{C_{AB}} [I_B - I_A] = 0$$

si asumimos que la solución es de la forma $I_A = A e^{i(\omega t + \varphi)}$; $I_B = B e^{i(\omega t + \varphi)}$, conseguimos dos ecuaciones lineales homogéneas de la forma:

$$0 = (a_{11} - \omega^2) I_A + a_{12} I_B$$

$$0 = a_{21} I_A + (a_{22} - \omega^2) I_B$$

Este planteamiento es muy similar al que se plantea para obtener los modos normales de oscilación en un sistema mecánico masa-resorte.

$$a_{11} = \left[\frac{1}{LC} + \frac{1}{LC_{AB}} \right] \quad ; \quad a_{12} = -\frac{1}{LC_{AB}}$$

$$a_{22} = \left[\frac{1}{LC} + \frac{1}{LC_{AB}} \right] \quad ; \quad a_{21} = -\frac{1}{LC_{AB}}$$

La solución no trivial corresponde a:

$$0 = (a_{11} - \omega^2)(a_{22} - \omega^2) - a_{12}a_{21}$$

Sustituyendo los valores de los coeficientes, obtenemos las frecuencias características de los dos modos de circulación de la corriente en el circuito:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad ; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{2}{LC_{AB}}}$$

Note que si I_A o I_B fuesen $=0$ (cortando la parte B o A del circuito) la frecuencia de oscilación sería igual a ω_0 .

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{1}{LC_{AB}}}$$

Por tanto el efecto de acoplar los dos circuitos es desdoblar la frecuencia base ω_0 , en dos frecuencias ω_1 y ω_2 .

Múltiples osciladores acoplados

La idea fundamental de este experimento es el estudio del acoplamiento de múltiples circuitos con los mismo elementos L y C, a los que denominaremos celdas, tal y como se muestra en la figura 2. Este arreglo no es mas que una extensión del sistema de dos osciladores acoplados mostrado anteriormente.

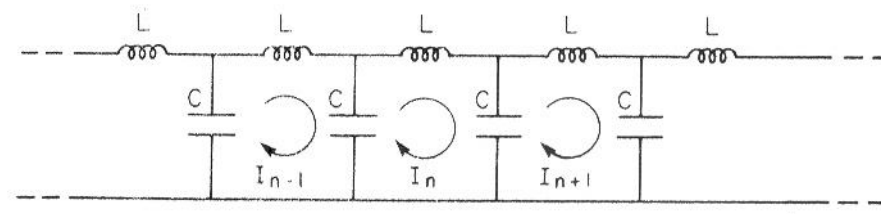


Figura 2: Múltiples circuitos de osciladores acoplados.

Considerando la corriente I_n en el n-ésimo circuito tenemos:

$$L \frac{d^2 I_n}{dt^2} + \frac{1}{C} [I_n - I_{n-1}] + \frac{1}{C} [I_n - I_{n+1}] = 0$$

Asumiendo una corriente senoidal del tipo $I_n = I_n^0 e^{j\omega t}$ de frecuencia ω , sustituimos en la ecuación anterior y obtenemos la siguiente relación:

$$\frac{I_{n-1}^0}{I_n^0} + \frac{I_{n+1}^0}{I_n^0} = 2 - \omega^2 LC \quad (1)$$

Para resolver esta ecuación de diferencias hay que observar que todos los elementos de la cadena son similares, por lo tanto el porcentaje de corriente entre elementos sucesivos es constante, esto significa que:

$$\frac{I_{n-1}^0}{I_n^0} = \frac{I_n^0}{I_{n+1}^0} = \dots = \text{constante}$$

A efectos de esta discusión exploraremos una posible solución de la forma

$$\frac{I_{n-1}^0}{I_n^0} = \frac{I_n^0}{I_{n+1}^0} = \dots = \pm e^{-j\beta}$$

si sustituimos en (1) β deberá cumplir con la siguiente relación

$$\cos(\beta) = \pm \left[1 - \frac{\omega^2 LC}{2} \right] \quad (2).$$

Este resultado implica que la corriente no sufre decrecimiento en la amplitud entre celdas. La corriente se va transmitiendo sin alteración de tramo en tramo de la cadena, manifestándose únicamente un cambio de fase. Además de (2) se infiere que ω cumple la siguiente condición:

$$0 \leq \omega \leq \omega_{corte} = \frac{2}{\sqrt{LC}} \quad (3)$$

Detengámonos ahora y analicemos lo que hemos conseguido. Hemos obtenido entonces un sistema circuital que asemeja una cadena de osciladores idénticos cada uno separado en forma progresiva por un factor de fase tal que:

$$I_1 = I_1^0 e^{j\omega t}, I_2 = I_1^0 e^{j(\omega t + \beta)}, I_3 = I_1^0 e^{j(\omega t + 2\beta)}, \dots$$

El sistema es un filtro “pasa bajos”, capaz de transmitir señales que son “virtualmente no atenuadas” para frecuencias menores a la frecuencia de corte. Decimos “virtualmente no atenuadas” puesto que siempre existen pérdidas debido a las resistencias presentes.

La ecuación (2) se puede reescribir de la siguiente forma

$$\operatorname{sen} \left(\frac{\beta}{2} \right) = \frac{\omega}{\omega_c} \quad (2')$$

Si usamos la ecuación (2'), para $\omega \ll \omega_c$ obtenemos el resultado (4) si definimos un tiempo Δt de la siguiente forma

$$\Delta t = \frac{2}{\omega_c} = \sqrt{LC}$$

$$\frac{\beta}{2} \sim \frac{\omega}{\omega_c} \rightarrow \omega \frac{\Delta t}{2} \rightarrow \beta \sim \omega \Delta t \quad (4)$$

De la ecuación (4) se interpreta claramente que Δt es el tiempo de transito (retraso) a través de una celda.

En el fondo la ecuación (2') es la ecuación de dispersión de la línea de retraso. Este aspecto se discutirá más detalladamente en la práctica correspondiente a la dispersión en la línea de retardo III-9.

La línea de retardo terminada con una $R=R_L$ en paralelo

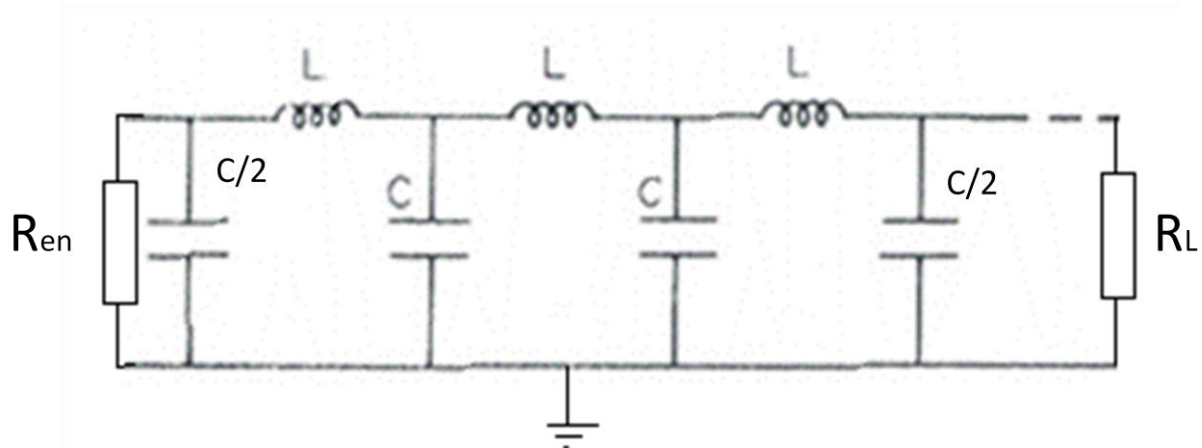


Figura 3. La línea de retardo en el laboratorio

Si uno hace un análisis discreto de la línea de retardo descubre que la siguiente relación se cumple para la carga acumulada Q_N en el condensador N(referencia 1):

$$Q_{N-1}(t) = \frac{1}{TT} Q_N(t + \Delta t) + \frac{RR}{TT} Q_{N-1}(t - \Delta t) \quad (3)$$

Donde RR y TT son el coeficiente de transmisión y reflexión respectivamente de la línea y Δt es un valor efectivo del tiempo de retraso a través de una celda.

Si cortamos la línea en ambos extremos obtenemos que el último condensador de acoplamiento cumpliría con la frecuencia correspondiente de resonancia del sistema si su valor es $C/2$. En presencia de una resistencia de carga R_L la ecuación que describe la línea en términos discretos es la siguiente (referencia 1):

$$\frac{1}{2}L \frac{d^2 Q_N}{dt^2} = -\frac{1}{C} \left(Q_N - \frac{1}{2} Q_{N-1} \right) - \frac{L}{R_L C} \frac{dQ_N}{dt} \quad (5)$$

Haciendo una expansión de Taylor para (3) y sustituyendo en (5) obtenemos las siguientes relaciones:

$$RR = \frac{1-(L/R_L \Delta t)}{1+(L/R_L \Delta t)} \quad (6)$$

$$TT = 1 + RR = \frac{2}{1+(L/R_L \Delta t)} \quad (7)$$

Donde RR y TT son el coeficiente de reflexión y transmisión de la línea. En la práctica estas cantidades se miden, por ejemplo, en el caso de la propagación de un pulso (donde la dispersión sea mínima) en función de los voltajes V_0, V_R y V_T , el votaje inicial, reflejado y transmitido respectivamente. V_0, V_R se miden en el extremo de entrada de la línea y V_T en el extremo de salida.

Es importante notar que si escogemos:

$$R_o = \frac{L}{\Delta t} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Entonces $RR=0$ y $TT=1$, la resistencia característica, para la cual no hay reflexión en la línea. Lo dicho hasta ahora lo podemos resumir y mezclando el aspecto experimental y el teórico en las siguientes expresiones

$$\frac{V_R}{V_o} = RR = \frac{1 - (R_o/R_L)}{1 + (R_o/R_L)} \quad (6')$$

$$\frac{V_T}{V_o} = TT = \frac{2}{1 + (R_o/R_L)} \quad (7')$$

Donde V_R se mide, junto con V_o , en el punto de entrada de la línea y V_T se mide a través de la resistencia de carga R_L .

ACTIVIDADES PRELIMINARES

1. Complete usted el cálculo de la frecuencia de corte.

Sugerencia: A partir de la siguiente ecuación $\cosh(p) = \pm \left[1 - \frac{\omega^2 LC}{2} \right]$ grafique las funciones $y = \cosh(p)$ y $y = \pm [1 - (\omega^2 LC/2)]$; Los puntos de intersección de la curva y la recta proporcionan las raíces de la ecuación.

2. Determine la velocidad de propagación de un pulso en un cable coaxial si su capacitancia es 93.5 pF/m (picofaradios por metro), y su resistencia característica es de $R_o = 50 \Omega$. Sugerencia la longitud de la celda unitaria es 1 metro.
3. Para el caso de una cuerda desarrolle un análisis que le permita determinar la relación entre A_r , A_t y A_{in} en un punto de la cuerda correspondiente a la interfase donde la densidad de la cuerda cambie de μ_1 a μ_2 . Este resultado se desarrolla en algunos libros en el tema de vibraciones y ondas.
4. **OPCIONAL:** Haciendo un análisis similar al desarrollado en la teoría, intercambie los condensadores por los inductores y viceversa y demuestre que la nueva frecuencia de corte es:

$$\omega_{corte} = \frac{1}{2\sqrt{LC}}$$

El estudiante podría demostrar que si se intercambian de posición L y C en la cadena el circuito funciona como un filtro pasa alto.

PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

- 1.- Entienda bien el problema de la propagación de un pulso en una estructura periódica y su análogo eléctrico.
- 2.- Realice el montaje experimental utilizando la guía de onda que se provee en el laboratorio. Coloque resistencias de carga en paralelo tanto a la entrada R_{en} como a la salida del circuito R_L , como se muestra en la **figura 3**. Explique en su informe la necesidad de ambas resistencias.
- 3.- Estudie el generador de pulsos, familiarizese con su funcionamiento. Describa en su informe cual sería el mejor pulso para trabajar en términos de su forma y su ancho temporal.
- 4.- Si todo está bien, debería observar en la pantalla del osciloscopio el pulso incidente y el reflejado (en el canal 1, medido a través de R_{en}) y el transmitido (en el canal 2, medido a través de R_L).
- 5.- Mida el tiempo de retardo de la línea. Deduzca el retardo por sección Δt .
- 6.- Mida la resistencia característica R_o . Utilizando los valores R_o y Δt estime los parámetros L y C, de la celda.
- 7.- Para diferentes valores de R_L (que deberá medir) mida el voltaje del pulso transmitido V_T ; del pulso reflejado V_R , y del pulso incidente V_i .

Grafique:

$$\frac{V_R}{V_I} \text{ vs. } \left(\frac{R_L}{R_o} \right)$$

$$\frac{V_T}{V_I} \text{ vs. } \left(\frac{R_L}{R_o} \right)$$

- 8.- En el laboratorio la atenuación es real y usted debe medirla y considerarla como una corrección a sus mediciones $\frac{V_R}{V_I}$ y $\frac{V_T}{V_I}$. La atenuación del pulso

transmitido A_T se puede medir colocando $R_L = R_o$ y midiendo $A_T = \left| \frac{V_T}{V_I} \right|_{R_L=R_o}$

.Infiera cual sería la atenuación para el pulso reflejado.

- 9.- Grafique las curvas corregidas por el factor de atenuación, como se indica en las expresiones siguientes. Inclúyalas en el gráfico anterior en.

$$\frac{V_T^*}{V_I} = \frac{V_T}{V_I A_T} \quad \text{vs.} \quad \left(\frac{R_L}{R_o} \right)$$

$$\frac{V_R^*}{V_I} = \frac{V_R}{V_I (A_T)^2} \quad \text{vs.} \quad \left(\frac{R_L}{R_o} \right)$$

- 10.- También incluya las curvas teóricas 6' y 7' .

BIBLIOGRAFIA

1. Berkeley Laboratory of Physics, Volumen B p. B6-47
2. "Electromagnetic Vibrations, Waves and Radiation", G.Bekefi y A.H. Barret, The MIT Press, 1990.