

# PRÁCTICA DE LABORATORIO III-12

---

## *EL PÉNDULO FÍSICO*

### *(amortiguación y acoplamiento)*

#### **OBJETIVOS**

1. Estudio de la señal temporal de un péndulo físico amortiguado.
2. Estudio de la señal temporal de dos péndulos físicos acoplados por un resorte.
3. Estudio del fenómeno de batido en un sistema de dos péndulos acoplados. Descripción de la señal temporal.
4. Comparar los resultados experimentales con estimaciones teóricas. Discuta sus resultados en el contexto de los errores experimentales.

#### **MATERIALES**

- 2 péndulos.
- Resortes de diferentes longitudes y materiales.
- Balanza y pesas.
- Cronómetro.
- Osciloscopio Tek.1002 (equipado con transformada de Fourier)
- Computador equipado con interfase Tek USB-GPIB.
- Aplicación OPENCHOICE y Sigma Express para Tektronix.

#### **ACTIVIDADES PRELIMINARES**

- Haga un estudio comparativo entre un péndulo simple ideal y un péndulo físico.
- Ud. debe en su pre-informe tratar en forma detallada y clara los diferentes casos que va a estudiar en el Laboratorio.

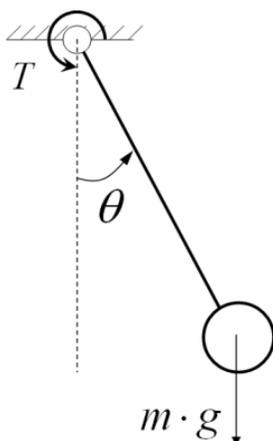
- Deduzca y resuelva la Ec. De movimiento de un péndulo físico amortiguado. Asu ma que el ...
  - Investigue sobre la constante de amortiguamiento  $\gamma = b/I$
  - Estudiar las características fundamentales de un modo normal: condiciones iniciales, frecuencia, etc... ¿Cómo excitar un modo normal?.
  - Para 2 péndulos –no amortiguados- , acoplados por un resorte K, describa los modos normales.
  - Describa teóricamente el fenómeno de batidos para 2 péndulos acoplados.
- Revise las referencias propuestas.

## FUNDAMENTOS

Los conceptos físicos sobre el tema del movimiento pendular se discuten comúnmente en los cursos de física básica. Sin embargo, para muchos péndulos de interés, hay que alejarse del contexto ideal de: masa puntual, estructura y masa de la cuerda despreciables, validez de las hipótesis básicas que definen el coeficiente de amortiguamiento, linealidad, etc...

En comparación, en esta experiencia haremos mediciones en un “péndulo físico”, donde las ecuaciones de movimiento describen el péndulo como un sólido rígido. Se seguirá preservando la aproximación lineal y dadas las condiciones del experimento queda comprometida la proposición de que la disipación en el péndulo es proporcional  $\sim bV$ . Donde b es una constante, y V es la velocidad.

### Ec. Mov. Péndulo Simple Amortiguado



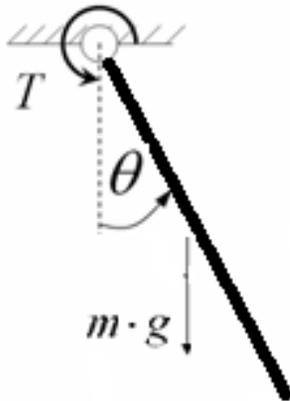
El péndulo ideal que se muestra en la figura cumple con la ecuación (linearizada)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta - \frac{b}{m} \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (1)$$

$$\theta(t) = C e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega' t - \alpha)$$

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \quad \gamma = \frac{b}{m} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

Figura 1. Péndulo Simple



### Ec. Mov. Péndulo Físico

La masa total es  $m$ ,  $I$  es el momento de inercia con respecto al eje de rotación, y  $l_{cm}$  es la distancia del eje de rotación al centro de masa.

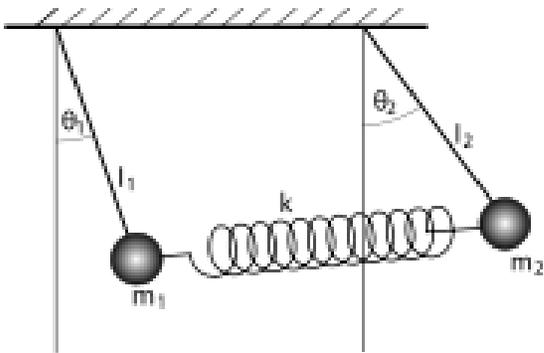
$$I_T \frac{d^2\theta}{dt^2} + M_T g L_{cm} \theta - \beta \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (2)$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{M_T g L_{cm}}{I_T}}$$

Figura 2. Péndulo físico

### Dos péndulos acoplados -no amortiguados

El movimiento de un sistema físico de múltiples partículas débilmente acopladas, se puede describir en función de un conjunto de movimientos canónicos que se conocen como modos normales de oscilación. El modo se maneja algebraicamente como una coordenada del movimiento que tiene asociada una frecuencia de oscilación bien definida. De esta forma, el movimiento de un conjunto de  $N$  partículas se describe completamente indicando la contribución de cada modo normal a cada partícula del sistema, en la forma de una combinación lineal, que depende de las condiciones iniciales del sistema [1,2]. El número de coordenadas (o modos) normales  $N$  es igual al número de partículas. Este resultado es muy importante. En 1<sup>na</sup> dimensión por ejemplo, esto implica, reducir de  $2 \times N \rightarrow N$  la cantidad de "piezas" de información requeridas para describir el sistema.



normales que llamaremos (+) y (-), que tienen las siguientes frecuencias y fases relativas.

El caso particular de **dos péndulos ideales acoplados y sin amortiguamiento** **Figura 3**, se puede describir con 2 modos

$\omega_- = \sqrt{g/l}$	PÉNDULOS EN FASE
$\omega_+ = \sqrt{2k/m + g/l}$	PÉNDULOS EN FASES OPUESTAS

Se puede mostrar que la solución final para los péndulo 1 y 2,  $\theta_1(t)$  y  $\theta_2(t)$  respectivamente, es la siguiente [3].  $\theta_0^-$ ,  $\theta_0^+$  son las amplitudes de cada modo, que dependen de las condiciones iniciales.

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= \theta_0^-(\cos(\omega_-t + \varphi_0^-)) + \theta_0^+(\cos(\omega_+t + \varphi_0^+)) . \\ \theta_2(t) &= \theta_0^-(\cos(\omega_-t + \varphi_0^-)) - \theta_0^+(\cos(\omega_+t + \varphi_0^+)) .\end{aligned}\quad (3)$$

En el caso particular de **dos péndulos físicos acoplados –sin amortiguamiento–**, las expresiones de la tabla anterior se deben modificar de la siguiente forma. Donde  $L_{cm}$  es la distancia del pivote al centro de masa, y  $l_{ap}$  es la distancia del pivote hasta la posición del resorte.

$\omega_- = \sqrt{\frac{M_T g L_{cm}}{I_T}}$
$\omega_+ = \sqrt{\frac{M_T g L_{cm}}{I_T} + \frac{2kl_{ap}^2}{I_T}}$

(4)

### Los batidos

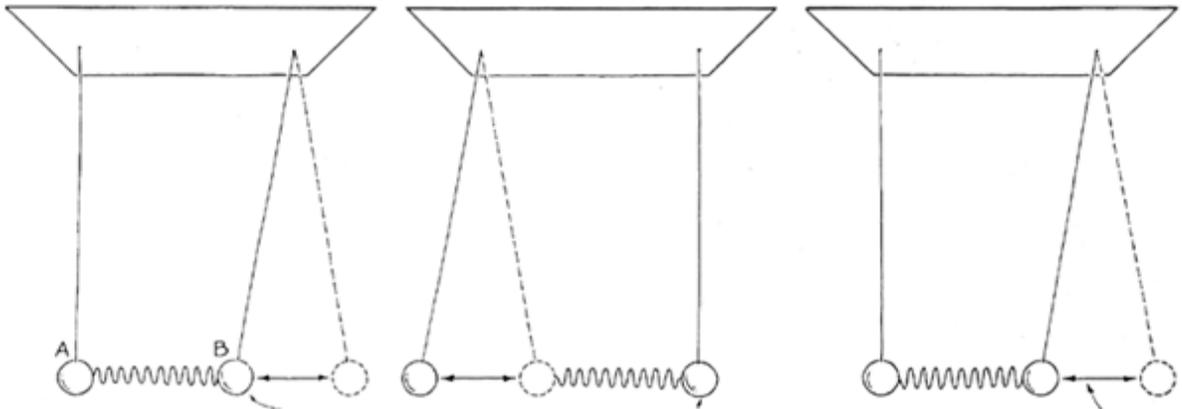
Un movimiento particular del sistema de dos péndulos acoplados por un resorte es el batido. Este movimiento se logra colocando las siguientes condiciones iniciales.

$$\theta_1(0) = 0 ; \theta_2(0) = C ; \dot{\theta}_1(0) = 0 ; \dot{\theta}_2(0)$$

Utilice el sistema de ecuaciones (3) y demuestre que la solución en este caso es de la forma

$$\theta_1(t) = C \left( \cos \left( \frac{\omega_- + \omega_+}{2} t \right) \right) \left( \cos \left( \frac{\omega_+ - \omega_-}{2} t \right) \right) .$$

$$\theta_2(t) = C \left( \text{sen} \left( \frac{\omega_- + \omega_+}{2} t \right) \right) \left( \text{sen} \left( \frac{\omega_+ - \omega_-}{2} t \right) \right). \quad (5)$$



**Figura 4. Batidos**

Como se muestra en la figura, con estas condiciones iniciales, la energía del sistema se traslada periódicamente de un péndulo a otro con una frecuencia característica  $\frac{\omega_+ - \omega_-}{2}$ , mucho menor que la frecuencia portadora  $\frac{\omega_- + \omega_+}{2}$ .

## PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

### A1.- Sistema de adquisición de datos

En esta actividad usted se debe familiarizar con el sistema de adquisición de datos. Conecte el osciloscopio TEK 1002 a través del módulo de interfase que conecta el puerto GPIB (en la parte de atrás del osciloscopio) y el puerto USB del computador.

Capture (descargue) la información de la pantalla del osciloscopio con la aplicación libre OPENCHOICE. Familiarícese con el procedimiento de captura y guardado del archivo de datos correspondiente.

### A2.- Medición de la historia temporal del péndulo físico

El objetivo experimental de nuestro montaje es el registro temporal del ángulo de desplazamiento del péndulo. Esto se logra acoplando el eje de rotación del péndulo a la perilla de ajuste de un potenciómetro multivuelta el cual forma parte de un sistema simple de polarización (fuente + otras resistencias de protección) como se muestra en la **figura 5**. De esta forma se traduce linealmente la historia temporal del ángulo de rotación del péndulo a una historia temporal de voltaje, la cual se presenta en la pantalla del osciloscopio. **Figura 5 Diagrama del experimento**

En esta actividad usted debe registrar las señal temporal para un péndulo simple de manera de estudiar sus características  $\omega'_0$  ,  $\gamma$  (vea las ecuaciones 1) Utilice 3 valores diferentes para la masa del péndulo.

**NOTA:** para este experimento debe utilizar hasta dos tipos de péndulos de los 3 disponibles en el laboratorio.

**A3.-** La historia temporal obtenida debe ser analizada utilizando el modelo teórico respectivo en una hoja EXCEL. Estudie el ejemplo SIMUL\_PENDULO.xlsx que se provee en el aula virtual, para una lámina de aluminio rectangular. Estime la frecuencia de oscilación teórica  $\omega'_{teo}$  utilizando el valor  $\gamma_{exp}$  , compare con el valor experimental  $\omega'_{exp}$ .

#### **A4-Medición de la características de un péndulo doble acoplado con un resorte.**

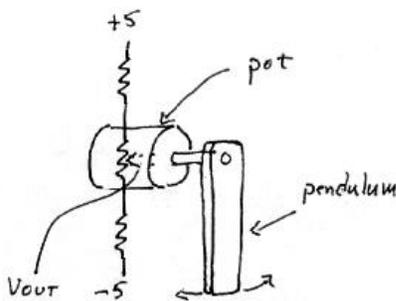
-Caracterice los dos modos normales de oscilación del sistema, de 2 péndulos acoplados con un resorte.

-Coloque las condiciones iniciales para conseguir un comportamiento de batido. Realice varias observaciones variando la magnitud del acoplamiento. Observe y obtenga varios registros temporales cambiando la magnitud del acoplamiento.

**Nota:** Para cambiar la magnitud del acoplamiento cambie la posición del resorte a lo largo del eje principal de los péndulos ¿explique porqué?.

-Utilice como modelo para su análisis de datos la siguiente Ec. empírica del movimiento de uno de los péndulos:

$$\theta_1(t) = C e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos\left(\frac{\omega_- + \omega_+}{2}t + \varphi_a\right) \cos\left(\frac{\omega_+ - \omega_-}{2}t + \varphi_b\right) \quad (6)$$



-Modifique su hoja EXCEL para simular la ecuación (6), obtenga los valores de  $\frac{\omega_- + \omega_+}{2}$ ,  $\frac{\omega_+ - \omega_-}{2}$ ,  $\gamma$ ,  $\varphi_a$  y  $\varphi_b$

**Nota:** También puede obtener estos valores directamente del osciloscopio, utilizando los cursores correspondientes.

-Para cambiar la magnitud del acoplamiento cambie la posición del resorte a lo largo del eje principal de los péndulos ¿explique porqué?.

-Determine  $\omega_-$ ,  $\omega_+$  y  $K$  , la constante del resorte. Vea la ecuación 5.

A)Relacione los valores de  $\omega_-$ ,  $\omega_+$  con estimaciones teóricas usando  $K$ .

B)Compare el valor de  $K$  obtenido, midiendo la constante directamente por otro método experimental.

-Considere los errores experimentales en su comparación.

## **BIBLIOGRAFIA**

- 1.-** Jerry B. Marion, "Dinámica clásica de las partículas y sistemas" Editorial Reverté S. A. 1975.
- 2.-** A. p . French, "Vibrations adn Waves", The MIT Introductory Series 1971.
- 3.-** MITOpen series <http://ocw.mit.edu/courses/physics/8-03-physics-iii-vibrations-and-waves-fall-2004/video-lectures/lecture-5/>
- 4.-** MITOpen series <http://ocw.mit.edu/courses/physics/8-03-physics-iii-vibrations-and-waves-fall-2004/video-lectures/lecture-2/>