PRÁCTICA DE LABORATORIO III-9

DISPERSIÓN EN UNA LÍNEA DE RETARDO

OBJETIVO

1.-Medir la dispersión $\omega = D(k)$ en una línea de retardo .
2.-Medir el decaimiento de la amplitdud de la onda en función de la frecuencia para $\omega > \omega_c$

MATERIALES

- Generador de ondas
- Osciloscopio de 2 canales
- Multímetro
- Línea de retardo
- Potenciómetros

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Propagación de una onda armónica

Una onda armónica de longitud de onda λ puede ser representada por la siguiente ecuación donde:

$$y(x,t) = A\cos[k(x - vt)]$$

En esta expresión *A* representa la amplitud de la onda y el argumento de la función coseno es conocido como la fase de la onda. Como la onda es una función periódica, podemos decir que $y(x+\lambda,t)=y(x,t)$, donde λ es la longitud de onda:

$$k\left[\left(x+\lambda\right)-vt\right]=k\left[x-vt\right]+2\pi \quad \Longrightarrow \quad k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

De manera análoga tenemos que y(x,t-T)=y(x,t), donde T es el período de la onda y f=1/T la frecuencia, por lo tanto:

$$k[x-v(t-T)]=k[x-vt]+2\pi \quad \Longrightarrow \quad kv=\frac{2\pi}{T}$$

Empleando los conocimientos adquiridos en cursos anteriores podemos escribir en una ecuación el valor correspondiente a la *velocidad de fase* v:

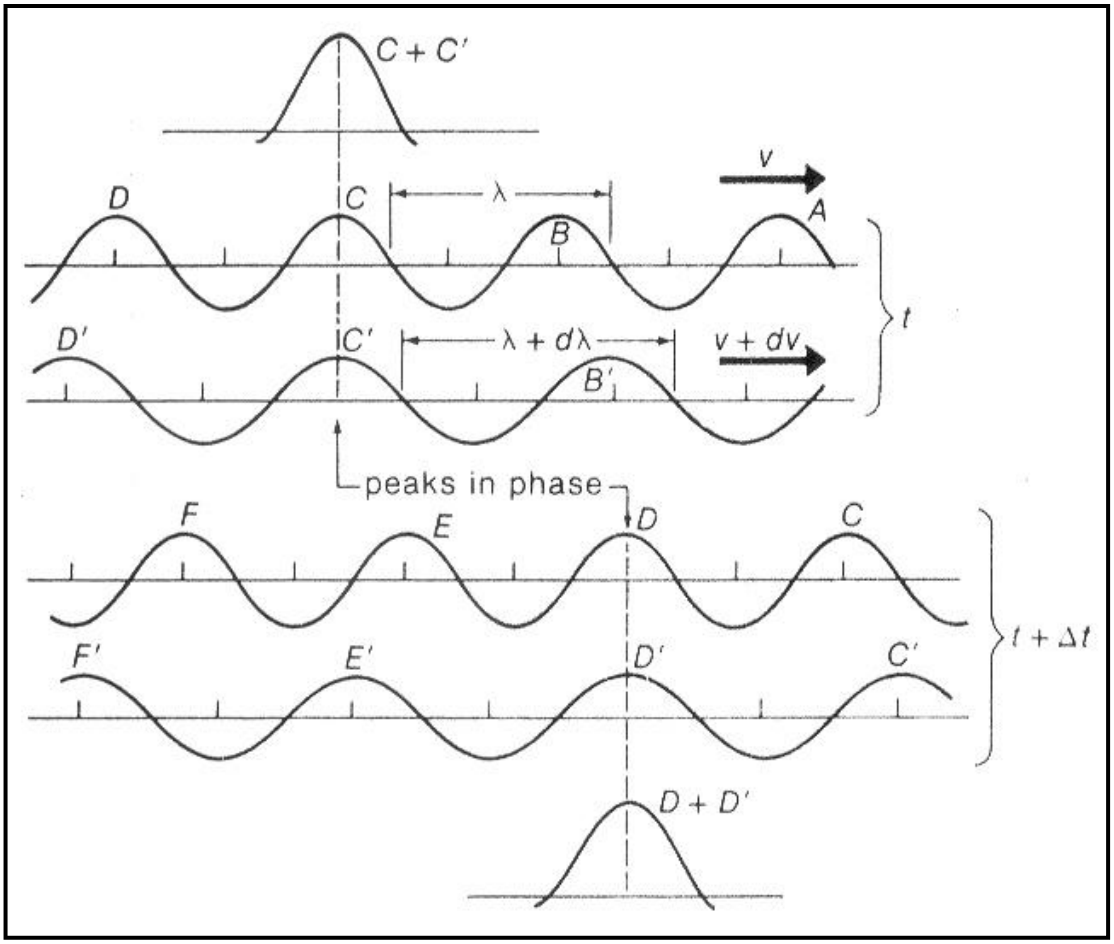
$$kv=\frac{2\pi}{\lambda}\cdot v=\frac{2\pi}{T}=2\pi f \quad \Longrightarrow \quad v=\lambda . f \qquad (1)$$

La velocidad de fase $\boldsymbol{v}$, es aquella velocidad a la que un punto de fase constante C, se desplaza, esto se ilustra en la siguiente derivación:

$$k(x-vt)=C \rightarrow \frac{dx}{dt}-v=0 \rightarrow \frac{dx}{dt}=v$$

En la práctica nos encontramos con frecuencia que sobre un medio se propaga una perturbación o pulso. Para entender esa propagación recurrimos al análisis de Fourier que nos enseña como desglosar una función cualquiera en términos de una base de funciones fundamentales, en particular $SEN(\omega t)\; y\; COS(\omega t)$, donde ω representa la frecuencia de oscilación y t es una variable independiente.

Al recurrir a este tipo de análisis, se presenta una pregunta fundamental ¿Tendrá la velocidad de fase v, un valor constante para cualquier valor de ω ?. La respuesta es NO en muchos casos. Indudablemente que esto depende del medio. Aquellos medios donde $v=v(\omega)\neq cte$ se les llama medios dispersivos. Las consecuencias de esto las trataremos de ilustrar seguidamente.



En la figura 1 se muestra un "pulso" en el tiempo $\boldsymbol{t}$, el cual se puede visualizar como la suma de las dos ondas periódicas (de periodicidad $\boldsymbol{\lambda}\,, \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{d\lambda}$) y velocidad de fase ($\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{dv}$) dibujadas en la parte inferior. Más abajo se dibujan las mismas ondas y el pulso para un tiempo $\boldsymbol{t} + \Delta\boldsymbol{t}$.

Observemos en la figura, los picos C, C', que se superponen para configurar el pico del pulso al tiempo t . Al tiempo $t + \Delta t$, como la onda "prima" viaja a mayor velocidad los picos D, D' coinciden, generando la nueva posición del pulso. Es evidente que los picos C,C' viajaron una distancia mayor que la recorrida por el pulso mismo, confirmando que la velocidad del pulso, es menor que la velocidad de fase de las ondas que lo constituyen. La velocidad del pulso es lo que se conoce en la literatura como **velocidad de grupo $\boldsymbol{v_g}$.**

En el tiempo $\boldsymbol{t}$ las crestas D,D' se encuentran separadas por una distancia $d\lambda$, para el tiempo tiempo $t+\Delta t$ ambas se encuentran en fase. Considerando que D recorrió una distancia de $v\,\Delta t$ y D' una distancia de $(v+dv)\Delta t$, algebraicamente conseguimos la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{v}\Delta \boldsymbol{t} + \boldsymbol{d\lambda} = (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{dv})\Delta \boldsymbol{t} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\lambda}{dv} = \Delta t \quad (2).$$

En el mismo tiempo el pulso se movió una distancia de $v\Delta t - \lambda$, la velocidad de este pulso se conoce como **la *velocidad de grupo*** . Usando la ecuación (2) obtenemos la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{v_g}\Delta \boldsymbol{t} = \boldsymbol{v}\Delta \boldsymbol{t} - \boldsymbol{\lambda} \rightarrow \boldsymbol{v_g} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\lambda}\frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{d\lambda}} \quad (3).$$

Si **la *velocidad de fase*** $\boldsymbol{v}$ es independiente de la longitud de onda, entonces dv/dλ = 0, y por lo tanto $\boldsymbol{v_g} = \boldsymbol{v}$. Usted debe demostrar que

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{k}} \quad (4) \quad \text{y} \quad \boldsymbol{v_g} = \frac{\boldsymbol{d\omega}}{\boldsymbol{dk}} \quad (5)$$

usando las expresiones (1,2 y 3) .

Está claro entonces que para describir la propagación de una onda en un medio necesitamos conocer la relación entre $\omega\ y\ k$. Esa relación $\omega = D(k)$ se conoce como la RELACIÓN DE DISPERSIÓN, y es la característica principal que uno debe conocer de un sistema físico capaz de soportar una onda. Cuando $d\omega/dk$ **no es constante** entonces se dice que el medio es dispersivo.

<u>Dispersión en la línea de retardo</u>

En la guía III-8 se presentó la siguiente ecuación de diferencias para una línea de retardo (o guía de onda). Asumiendo una corriente senoidal del tipo $I_n = I_n^o\, e^{j\omega t}$ para la celda n :

$$\frac{I_{n-1}^o}{I_n^o} + \frac{I_{n+1}^o}{I_n^o} = 2 - \omega^2 LC \quad (6)$$

Para resolver esta ecuación de diferencias hay que observar que todos los elementos de la cadena son similares por lo tanto el porcentaje de corriente entre elementos sucesivos es constante, esto significa que:

$$\frac{I^o_{n-1}}{I^o_n} = \frac{I^o_n}{I^o_{n+1}} = ... = \text{constante}$$

Para resolver se propone fijar esta constante a ± exp(-p), donde *p* es un coeficiente por determinar, por lo tanto ahora tenemos:

$$\frac{I^o_{n-1}}{I^o_n} = \frac{I^o_n}{I^o_{n+1}} = ... = \pm e^{-p}$$

sustituyendo este resultado en (6) :

$$e^{-p} + e^{+p} = \pm\left(2 - \omega^2 LC\right).$$

Note que esta solución implica un deterioro (decaimiento) de la señal a medida que esta avanza a lo largo del circuito. Lo contrario $\boldsymbol{e^p}$ implicaría un crecimiento ilimitado de la corriente lo que no es físicamente factible. Reescribiendo la ecuación anterior obtenemos:

$$e^{-p} + e^{+p} = 2\cosh(p)$$

$$\cosh(p) = \pm\left[1 - \frac{\omega^2 LC}{2}\right] \quad (7)$$

Para $\omega \geq \omega_{corte} = \frac{2}{\sqrt{LC}}$ la anterior expresión es una ecuación transcendental, con dos posibles soluciones. Si excitamos nuestro arreglo de osciladores acoplados con una frecuencia mayor a la de corte, entonces nuestra señal experimentará un decrecimiento exponencial.

Si exploramos la posibilidad de un *p* imaginario de la forma $p = j\beta$, y prosiguiendo con un análisis similar al anterior, tenemos:

$$\frac{I_{n-1}^{o}}{I_{n}^{o}}=\frac{I_{n}^{o}}{I_{n+1}^{o}}=.......=\pm e^{-j\beta}$$

$$\cos(\beta)=\pm\left[1-\frac{\omega^2 LC}{2}\right] \quad (8)$$

Para $0 \leq \omega \leq \omega_{corte} = \frac{2}{\sqrt{LC}}$ la corriente no sufre decrecimiento en la amplitud y se va transmitiendo sin alteración de tramo en tramo de la cadena , manifestándose únicamente un cambio de fase. Hemos obtenido entonces un circuito que asemeja una cadena de osciladores idénticos cada uno separado en forma progresiva por un factor de fase tal que:

$$I_1 = I_1^0 e^{i\omega t}, I_2 = I_1^0 e^{i(\omega t+\beta)}, I_3 = I_1^0 e^{i(\omega t+2\beta)}, ...$$

Para efectos prácticos la línea de retardo es un filtro pasa bajos capaz de transmitir señales que son “virtualmente no atenuadas” para frecuencias menores a la frecuencia de corte. Decimos “virtualmente no atenuadas” puesto que siempre existen pérdidas debido a resistencias inherentes.

Resultados finales

El factor de fase $[e^{-p},\ e^{-j\beta}]$ se convierte en un retraso relativo entre los extremos de una celda, lo cual es la base de la propagación de una onda. Tomando las ecuaciones (7) y (8) se puede demostrar que

$$e^{-p} = K - \sqrt{K^2 - 1} \quad ; \quad K = \left[2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 - 1\right] \quad (7')$$

$$sen\ \left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\omega}{\omega_c} \quad (8')$$

donde (7’) es válida $\omega > \omega_c\ \ y\ \ (8')\ \ \omega < \omega_c$.

La expresión (8’) representa es la ecuación de dispersión de la línea de retardo, si realizamos algunas operaciones para reescribir la expresión en función de k. Recordemos la definición de β, y sea Δl, la longitud de la celda unitaria

$$\frac{\beta}{2\pi} = \frac{\Delta t}{T} = \frac{w}{2\pi}\Delta t = \frac{k\,v}{2\pi}\ \Delta t = \frac{k}{2\pi}\ \Delta l,$$

así podemos reescribir (8’) de la siguiente forma:

$$sen\ \left(\frac{k\ \Delta l}{2}\right) = \frac{\omega}{\omega_c} \qquad \text{(8')}$$

La intención de esta práctica es explorar las expresiones (7’) y (8’) del punto de vista experimental.

ACTIVIDADES PRELIMINARES

1.- Complete usted el cálculo de la frecuencia de corte.

Sugerencia: A partir de la ecuación (7) $\cosh(p) = \pm\left[1 - \frac{\omega^2 LC}{2}\right]$ grafique las funciones *y = cosh (p)* y *y =* $\pm[1-(\omega^2 LC/2)]$; Los puntos de intersección de la curva y la recta proporcionan las raíces de la ecuación.

2.-Para realizar esta práctica se requiere el uso de señales de la forma $\boldsymbol{sen(\omega t)\ y\ cos\ (\omega t)}$, explique esta observación.

3.-La propagación en una línea de retardo depende del valor de la resistencia de carga R_L. Indique que valor de R_L sería el indicado para realizar las mediciones de la dispersión en la línea de retardo. Proponga un método experimental para fijar el valor de R_L más apropiado.

PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

<u>Preliminares</u>

-Se quiere medir $\omega = D(k)$ para nuestra línea de retardo discreta. Para esto tenemos que utilizar señales espectralmente puras, lo que se cumple para una señal del tipo sinusoidal de frecuencia ω. Además debemos colocar la resistencia R_L más adecuada para preservar la integridad de nuestra señal. Revise las actividades preliminares.

-Verifique experimentalmente los valores de L y C de su línea de transmisión .

- Diseñe una estrategia para tomar sus datos. Recuerde que la densidad de puntos a medir es proporcional a la magnitud de la variación de la cantidad física bajo observación.

Actividades experimentales propiamente dichas

0.-Para realizar el punto 1 de la práctica, debe desarrollar una metodología confiable para medir el desfasaje β en una celda, para una señal de frecuencia $\boldsymbol{\omega}$. La línea de retardo en el laboratorio le provee de una adición circuital que le puede ayudar en este respecto.

1.-Grafique la función $\boldsymbol{\omega}$ **vs.** $\frac{\boldsymbol{\beta}}{\Delta \mathbf{l}}$, compare en un mismo gráfico sus mediciones experimentales y con el resultado del modelo teórico, ecuación (8'). Indique las barras de error de sus valores experimentales.

2.-Grafique la velocidad de fase, $\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{k}}$ $\boldsymbol{vs.\,\omega}$, donde $k = \frac{\beta}{\Delta l}$. Indique sus barras de error.

3.- Grafique la velocidad de grupo, $\frac{\boldsymbol{d\omega}}{\boldsymbol{dk}}$ $\boldsymbol{vs.\,\omega}$. Para realizar este gráfico debe idear una estrategia gráfica con su hoja de cálculo.

4.-Grafique el valor de la atenuación en una celda $AT\ vs.\ w$. Compare con las estimaciones teóricas (5). Infiera un valor experimental para w_c, compare con el valor esperado.

BIBLIOGRAFÍA

1. Berkeley Laboratory of Physics Volumen B - B-7
2. "Electromagnétic Vibrations, Waves and Radiation",G.Bekefi y A.H. Barret, The MIT Press, 1990.