Estados coherentes dinámicos en mecánica cuántica

Aureliano Skirzewski

Universidad de Los Andes

FAE, 11.12.2006

A. Skirzewski, M. Bojowald: gr-qc/0511043,gr-qc/0609057

Plan de la charla

- Motivación
- Formulación geométrica de la mecánica cuántica
- Estados coherentes dinámicos
- Límite semiclásico y dinámica efectiva
- Límite semiclásico de una teoría cuántica de campos

Plan de la charla

- Motivación
- Formulación geométrica de la mecánica cuántica
- Estados coherentes dinámicos
- Límite semiclásico y dinámica efectiva
- Límite semiclásico de una teoría cuántica de campos

Plan de la charla

- Motivación
- Formulación geométrica de la mecánica cuántica
- Estados coherentes dinámicos
- Límite semiclásico y dinámica efectiva
- Límite semiclásico de una teoría cuántica de campos

Plan de la charla

- Motivación
- Formulación geométrica de la mecánica cuántica
- Estados coherentes dinámicos
- Límite semiclásico y dinámica efectiva
- Límite semiclásico de una teoría cuántica de campos

Plan de la charla

- Motivación
- Formulación geométrica de la mecánica cuántica
- Estados coherentes dinámicos
- Límite semiclásico y dinámica efectiva
- Límite semiclásico de una teoría cuántica de campos

Ecuaciones efectivas en teoría cuántica de campos

- Definamos el funcional generatríz de la amplitud de transición

$$Z_\lambda[J_i] = \langle out|in\rangle_\lambda = \int (D\phi)(D\pi) e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt\left(H_\lambda + J_i\phi^i\right)}$$

- La transformación de Legendre del funcional generatríz de los diagramas conectados es

$$\Gamma_\lambda[\phi^i] = i\hbar\log\left(Z_\lambda[J_i]/Z_0[J_i]\right) - \int_{-\infty}^{\infty} dt J_i\phi^i$$

- Si el vacío es estable, $\langle out|\hat{\phi}^i|in\rangle = 0$, concluimos que

$$\Gamma_\lambda[\phi^i]_{,\phi^k} = S_\lambda\left[\phi^i - i\hbar\Delta^{ij}[\phi^i]\frac{\delta}{\delta\phi^j}\right]_{,\phi^k} = -J_k = 0$$

Ecuaciones efectivas en teoría cuántica de campos

- Definamos el funcional generatríz de la amplitud de transición

$$Z_\lambda[J_i] = \langle out|in\rangle_\lambda = \int (D\phi)(D\pi) e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt\left(H_\lambda + J_i\phi^i\right)}$$

- La transformación de Legendre del funcional generatríz de los diagramas conectados es

$$\Gamma_\lambda[\phi^i] = i\hbar \log\left(Z_\lambda[J_i]/Z_0[J_i]\right) - \int_{-\infty}^{\infty} dt J_i\phi^i$$

- Si el vacío es estable, $\langle out|\hat{\phi}^i|in\rangle = 0$, concluimos que

$$\Gamma_\lambda[\phi^i]_{,\phi^k} = S_\lambda\left[\phi^i - i\hbar\Delta^{ij}[\phi^i]\frac{\delta}{\delta\phi^j}\right]_{,\phi^k} = -J_k = 0$$

Ecuaciones efectivas en teoría cuántica de campos

- Definamos el funcional generatríz de la amplitud de transición

$$Z_\lambda[J_i] = \langle out|in\rangle_\lambda = \int (D\phi)(D\pi)e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt\left(H_\lambda + J_i\phi^i\right)}$$

- La transformación de Legendre del funcional generatríz de los diagramas conectados es

$$\Gamma_\lambda[\phi^i] = i\hbar \log\left(Z_\lambda[J_i]/Z_0[J_i]\right) - \int_{-\infty}^{\infty} dt J_i\phi^i$$

- Si el vacío es estable, $\langle out|\hat{\phi}^i|in\rangle = 0$, concluimos que

$$\Gamma_\lambda[\phi^i]_{,\phi^k} = S_\lambda\left[\phi^i - i\hbar\Delta^{ij}[\phi^i]\frac{\delta}{\delta\phi^j}\right]_{,\phi^k} = -J_k = 0$$

Formulación geométrica de la mecánica cuántica [Ashtekar&Schilling'97]

- Se basa en que todo espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un espacio métrico equipado con una estructura simpléctica $\langle \eta|\xi\rangle = \frac{1}{2\hbar}G(\eta,\xi) + \frac{i}{2\hbar}\Omega(\eta,\xi)$ y $G(\eta,\xi) = \Omega(\eta, i\xi)$.
- Dado el operador Hamiltoniano $\hat{H} = \sum_n E_n|n\rangle\langle n|$, definamos el Hamiltoniano en un punto Ψ del espacio de Hilbert cuyas coordenadas son $\Psi_n = \langle n|\Psi\rangle$ $H_Q := \langle\Psi|\hat{H}|\Psi\rangle = \sum_n E_n|\Psi_n|^2$
- Podemos también calcular el corchete de Poisson asociado a la estructura simpléctica $\{\mathrm{Re}\Psi_n, \mathrm{Im}\Psi_m\} = \frac{1}{2\hbar}\delta_{nm}$
- Para finalmente obtener las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\Psi_n &= \{\mathrm{Re}\Psi_n, H_Q\} &= \frac{E_n}{\hbar}\mathrm{Im}\Psi_n, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Im}\Psi_n &= \{\mathrm{Im}\Psi_n, H_Q\} &= -\frac{E_n}{\hbar}\mathrm{Re}\Psi_n \end{aligned}$$

Formulación geométrica de la mecánica cuántica [Ashtekar&Schilling'97]

- Se basa en que todo espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un espacio métrico equipado con una estructura simpléctica $\langle\eta|\xi\rangle = \frac{1}{2\hbar}G(\eta,\xi) + \frac{i}{2\hbar}\Omega(\eta,\xi)$ y $G(\eta,\xi) = \Omega(\eta, i\xi)$.
- Dado el operador Hamiltoniano $\hat{H} = \sum_n E_n|n\rangle\langle n|$, definamos el Hamiltoniano en un punto Ψ del espacio de Hilbert cuyas coordenadas son $\Psi_n = \langle n|\Psi\rangle$ $H_Q := \langle\Psi|\hat{H}|\Psi\rangle = \sum_n E_n|\Psi_n|^2$
- Podemos también calcular el corchete de Poisson asociado a la estructura simpléctica $\{\mathrm{Re}\Psi_n, \mathrm{Im}\Psi_m\} = \frac{1}{2\hbar}\delta_{nm}$
- Para finalmente obtener las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\Psi_n &= \{\mathrm{Re}\Psi_n, H_Q\} &= \frac{E_n}{\hbar}\mathrm{Im}\Psi_n,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Im}\Psi_n &= \{\mathrm{Im}\Psi_n, H_Q\} &= -\frac{E_n}{\hbar}\mathrm{Re}\Psi_n
\end{aligned}$$

Formulación geométrica de la mecánica cuántica [Ashtekar&Schilling'97]

- Se basa en que todo espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un espacio métrico equipado con una estructura simpléctica $\langle\eta|\xi\rangle = \frac{1}{2\hbar}G(\eta,\xi) + \frac{i}{2\hbar}\Omega(\eta,\xi)$ y $G(\eta,\xi) = \Omega(\eta, i\xi)$.
- Dado el operador Hamiltoniano $\hat{H} = \sum_n E_n|n\rangle\langle n|$, definamos el Hamiltoniano en un punto Ψ del espacio de Hilbert cuyas coordenadas son $\Psi_n = \langle n|\Psi\rangle$ $H_Q := \langle\Psi|\hat{H}|\Psi\rangle = \sum_n E_n|\Psi_n|^2$
- Podemos también calcular el corchete de Poisson asociado a la estructura simpléctica $\{\mathrm{Re}\Psi_n, \mathrm{Im}\Psi_m\} = \frac{1}{2\hbar}\delta_{nm}$
- Para finalmente obtener las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\Psi_n &= \{\mathrm{Re}\Psi_n, H_Q\} &= \frac{E_n}{\hbar}\mathrm{Im}\Psi_n, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Im}\Psi_n &= \{\mathrm{Im}\Psi_n, H_Q\} &= -\frac{E_n}{\hbar}\mathrm{Re}\Psi_n
\end{aligned}$$

Formulación geométrica de la mecánica cuántica [Ashtekar&Schilling'97]

- Se basa en que todo espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un espacio métrico equipado con una estructura simpléctica $\langle\eta|\xi\rangle = \frac{1}{2\hbar}G(\eta,\xi) + \frac{i}{2\hbar}\Omega(\eta,\xi)$ y $G(\eta,\xi) = \Omega(\eta, i\xi)$.
- Dado el operador Hamiltoniano $\hat{H} = \sum_n E_n|n\rangle\langle n|$, definamos el Hamiltoniano en un punto Ψ del espacio de Hilbert cuyas coordenadas son $\Psi_n = \langle n|\Psi\rangle$ $H_Q := \langle\Psi|\hat{H}|\Psi\rangle = \sum_n E_n|\Psi_n|^2$
- Podemos también calcular el corchete de Poisson asociado a la estructura simpléctica $\{\mathrm{Re}\Psi_n, \mathrm{Im}\Psi_m\} = \frac{1}{2\hbar}\delta_{nm}$
- Para finalmente obtener las ecuaciones de Hamilton

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\Psi_n &= \{\mathrm{Re}\Psi_n, H_Q\} &= \frac{E_n}{\hbar}\mathrm{Im}\Psi_n, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Im}\Psi_n &= \{\mathrm{Im}\Psi_n, H_Q\} &= -\frac{E_n}{\hbar}\mathrm{Re}\Psi_n
\end{aligned}
$$

Formulación geométrica de la mecánica cuántica

- Pueden usarse coordenadas $F(\Psi) := \langle\Psi|\hat{F}|\Psi\rangle/\langle\Psi|\Psi\rangle$ sin perder informacion del espacio proyectivo de Hilbert.
- Definamos la derivada de Lie

$$\mathrm{d}F(\eta)|_{\Psi} := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left.\frac{\langle\Psi+t\eta|\hat{F}|\Psi+t\eta\rangle}{\langle\Psi+t\eta|\Psi+t\eta\rangle}\right|_{t=0},$$

- Un campo vectorial *Hamiltoniano* X_F es asociado a una función F a través de la ecuación $\mathrm{d}F(\eta) = \Omega(X_F, \eta)$ para obtener

$$X_F|_{\Psi} = \frac{1}{i\hbar}(\hat{F} - F)\Psi$$

- Finalmente, podemos definir el corchete de Poisson evaluando la estructura simpléctica

$$\{F, G\} := \Omega(X_F, X_G) = \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{F}, \hat{G}]\rangle$$

Formulación geométrica de la mecánica cuántica

- Pueden usarse coordenadas $F(\Psi) := \langle\Psi|\hat{F}|\Psi\rangle/\langle\Psi|\Psi\rangle$ sin perder informacion del espacio proyectivo de Hilbert.
- Definamos la derivada de Lie

$$\mathrm{d}F(\eta)|_\Psi := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\langle\Psi+t\eta|\hat{F}|\Psi+t\eta\rangle}{\langle\Psi+t\eta|\Psi+t\eta\rangle}\right|_{t=0},$$

- Un campo vectorial *Hamiltoniano* X_F es asociado a una función F a través de la ecuación $\mathrm{d}F(\eta) = \Omega(X_F,\eta)$ para obtener

$$X_F|_\Psi = \frac{1}{i\hbar}(\hat{F}-F)\Psi$$

- Finalmente, podemos definir el corchete de Poisson evaluando la estructura simpléctica

$$\{F,G\} := \Omega(X_F,X_G) = \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{F},\hat{G}]\rangle$$

Formulación geométrica de la mecánica cuántica

- Pueden usarse coordenadas $F(\Psi) := \langle\Psi|\hat{F}|\Psi\rangle / \langle\Psi|\Psi\rangle$ sin perder informacion del espacio proyectivo de Hilbert.
- Definamos la derivada de Lie

$$\mathrm{d}F(\eta)|_{\Psi} := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\langle\Psi + t\eta|\hat{F}|\Psi + t\eta\rangle}{\langle\Psi + t\eta|\Psi + t\eta\rangle}\bigg|_{t=0},$$

- Un campo vectorial *Hamiltoniano* X_F es asociado a una función F a través de la ecuación $\mathrm{d}F(\eta) = \Omega(X_F, \eta)$ para obtener

$$X_F|_{\Psi} = \frac{1}{i\hbar}(\hat{F} - F)\Psi$$

- Finalmente, podemos definir el corchete de Poisson evaluando la estructura simpléctica

$$\{F, G\} := \Omega(X_F, X_G) = \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{F}, \hat{G}]\rangle$$

Formulación geométrica de la mecánica cuántica

- Pueden usarse coordenadas $F(\Psi) := \langle\Psi|\hat{F}|\Psi\rangle/\langle\Psi|\Psi\rangle$ sin perder informacion del espacio proyectivo de Hilbert.
- Definamos la derivada de Lie

$$\mathrm{d}F(\eta)|_{\Psi} := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\langle\Psi+t\eta|\hat{F}|\Psi+t\eta\rangle}{\langle\Psi+t\eta|\Psi+t\eta\rangle}\bigg|_{t=0},$$

- Un campo vectorial *Hamiltoniano* X_F es asociado a una función F a través de la ecuación $\mathrm{d}F(\eta) = \Omega(X_F, \eta)$ para obtener

$$X_F|_{\Psi} = \frac{1}{i\hbar}(\hat{F} - F)\Psi$$

- Finalmente, podemos definir el corchete de Poisson evaluando la estructura simpléctica

$$\{F, G\} := \Omega(X_F, X_G) = \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{F}, \hat{G}]\rangle$$

Coordenadas de $\mathcal{H}$ y sus corchetes de Poisson [Bojowald&Skirzewski'05]

- Estudiemos el algebra de Heissenberg $\left[\hat{x}^i, \hat{x}^j\right] = i\hbar\epsilon^{ij}$ generada por los operadores fundamentales $\hat{x}^q := \hat{q}$ y $\hat{x}^p := \hat{p}$
- Escojamos coordenadas $x^i = (\langle\hat{q}\rangle, \langle\hat{p}\rangle)$ donde $i = q, p$ y
  $G^{i_1\cdots i_n} = \langle(\hat{x}^{(i_1} - x^{(i_1})\ldots(\hat{x}^{i_n)} - x^{i_n)})\rangle = \sum_{k=0}^{n}(-)^k\binom{n}{k}x^{(i_1}\ldots x^{i_k}\langle\hat{x}^{i_{k+1}}\ldots\hat{x}^{i_n)}\rangle,$
- Usando el corchete de Poisson definido previamente, se obtiene

$$\{x^i, x^j\} = \epsilon^{ij},$$

$$\{x^j, G^{i_1\cdots i_n}\} = \Omega(X_{x^j}, X_{G^{i_1\cdots i_n}}) = 0, \qquad \text{y}$$

$$\{G^{a,n}, G^{b,m}\} = \sum_r \left[\left(\frac{\hbar}{2}\right)^{2r} K[a,b,m,n,r]G^{a+b-2r-1,m+n-4r-2}\right.$$

$$\left. - \frac{b(n-a)}{m-b+1}G^{a,n-1}G^{b-1,m-1} + \frac{a(m-b)}{n-a+1}G^{b,m-1}G^{a-1,n-1}\right]$$

donde $G^{a,n} := G^{p\ldots px\ldots x}$ con $a = \#p$ y $n = \#p + \#x$.

Coordenadas de $\mathcal{H}$ y sus corchetes de Poisson [Bojowald&Skirzewski'05]

- Estudiemos el algebra de Heissenberg $\left[\hat{x}^i, \hat{x}^j\right] = i\hbar\epsilon^{ij}$ generada por los operadores fundamentales $\hat{x}^q := \hat{q}$ y $\hat{x}^p := \hat{p}$
- Escojamos coordenadas $x^i = (\langle\hat{q}\rangle, \langle\hat{p}\rangle)$ donde $i = q, p$ y
$$G^{i_1\ldots i_n} = \langle(\hat{x}^{(i_1} - x^{(i_1})\ldots(\hat{x}^{i_n)} - x^{i_n)})\rangle = \sum_{k=0}^{n}(-)^k\binom{n}{k}x^{(i_1}\ldots x^{i_k}\langle\hat{x}^{i_{k+1}}\ldots\hat{x}^{i_n)}\rangle,$$
- Usando el corchete de Poisson definido previamente, se obtiene

$$\{x^i, x^j\} = \epsilon^{ij},$$

$$\{x^j, G^{i_1\cdots i_n}\} = \Omega(X_{x^j}, X_{G^{i_1\cdots i_n}}) = 0, \qquad \text{y}$$

$$\{G^{a,n}, G^{b,m}\} = \sum_r \left[\left(\frac{\hbar}{2}\right)^{2r} K[a,b,m,n,r]G^{a+b-2r-1,m+n-4r-2}\right]$$

$$-\frac{b(n-a)}{m-b+1}G^{a,n-1}G^{b-1,m-1} + \frac{a(m-b)}{n-a+1}G^{b,m-1}G^{a-1,n-1}$$

donde $G^{a,n} := G^{p\ldots px\ldots x}$ con $a = \#p$ y $n = \#p + \#x$.

Coordenadas de $\mathcal{H}$ y sus corchetes de Poisson [Bojowald&Skirzewski'05]

- Estudiemos el algebra de Heissenberg $\left[\hat{x}^i, \hat{x}^j\right] = i\hbar\epsilon^{ij}$ generada por los operadores fundamentales $\hat{x}^q := \hat{q}$ y $\hat{x}^p := \hat{p}$
- Escojamos coordenadas $x^i = (\langle\hat{q}\rangle, \langle\hat{p}\rangle)$ donde $i = q, p$ y
$$G^{i_1\cdots i_n} = \langle(\hat{x}^{(i_1} - x^{(i_1})\ldots(\hat{x}^{i_n)} - x^{i_n)})\rangle = \sum_{k=0}^{n}(-)^k\binom{n}{k}x^{(i_1}\ldots x^{i_k}\langle\hat{x}^{i_{k+1}}\ldots\hat{x}^{i_n)}\rangle,$$
- Usando el corchete de Poisson definido previamente, se obtiene

$$\left\{x^i, x^j\right\} = \epsilon^{ij},$$

$$\left\{x^j, G^{i_1\cdots i_n}\right\} = \Omega(X_{x^j}, X_{G^{i_1\cdots i_n}}) = 0, \qquad \text{y}$$
$$\left\{G^{a,n}, G^{b,m}\right\} = \sum_r \left[\left(\frac{\hbar}{2}\right)^{2r} K[a,b,m,n,r] G^{a+b-2r-1,m+n-4r-2}\right.$$
$$\left. - \frac{b(n-a)}{m-b+1} G^{a,n-1} G^{b-1,m-1} + \frac{a(m-b)}{n-a+1} G^{b,m-1} G^{a-1,n-1}\right]$$

donde $G^{a,n} := G^{p\ldots px\ldots x}$ con $a = \#p$ y $n = \#p + \#x$.

Evolución cuántica Vs. Evolución semiclásica

Quantum dynamics

- Las ecuaciones de Schrödinger pueden ser reescritas ahora como las ecuaciones de Hamilton de un conjunto infinito de grados de libertad donde $H_Q := \langle H(\hat{x}^i) \rangle$

$$\dot{x}^i = \{x^i, H_Q\}$$

$$\dot{G}^{i_1,\ldots,i_n} = \{G^{i_1,\ldots,i_n}, H_Q\}$$

- Si las variables cuánticas son pequeñas, se dice que el sistema es semiclásico. Definimos asi una *expansión semiclásica* por la inclusión progresiva de grados de libertad cuánticos.
- Así, cuando las relaciones de incertidumbre son casi saturadas $G^{qq}G^{pp} - (G^{qp})^2 \approx \frac{\hbar^2}{4}$, y $[G^{i_1,\ldots,i_n}] \approx \hbar^{n/2}$. Entonces, a primer orden en $\hbar$, las ecuaciones cuánticas vienen dadas por

$$\dot{x}^i = \epsilon^{ij}(H(q,p)_{,j} + \frac{1}{2}H(q,p)_{,jkl}\, G^{kl}) + O(\hbar^2)$$

$$\dot{G}^{a,n} = -aH(q,p)_{,qq}G^{a-1,n} + (n-2a)H(q,p)_{,qp}G^{a,n} + (n-a)H(q,p)_{,pp}G^{a+1,n}$$

Evolución cuántica Vs. Evolución semiclásica

▸ Quantum dynamics

- Las ecuaciones de Schrödinger pueden ser reescritas ahora como las ecuaciones de Hamilton de un conjunto infinito de grados de libertad donde $H_Q := \langle H(\hat{x}^i)\rangle$

$$\dot{x}^i = \{x^i, H_Q\}$$

$$\dot{G}^{i_1,\ldots,i_n} = \{G^{i_1,\ldots,i_n}, H_Q\}$$

- Si las variables cuánticas son pequeñas, se dice que el sistema es semiclásico. Definimos asi una *expansión semiclásica* por la inclusión progresiva de grados de libertad cuánticos.

- Así, cuando las relaciones de incertidumbre son casi saturadas $G^{qq}G^{pp} - (G^{qp})^2 \approx \frac{\hbar^2}{4}$, y $[G^{i_1,\ldots,i_n}] \approx \hbar^{n/2}$. Entonces, a primer orden en $\hbar$, las ecuaciones cuánticas vienen dadas por

$$\dot{x}^i = \epsilon^{ij}\left(H(q,p)_{,j} + \frac{1}{2}H(q,p)_{,jkl}\,G^{kl}\right) + O(\hbar^2)$$

$$\dot{G}^{a,n} = -aH(q,p)_{,qq}G^{a-1,n} + (n-2a)H(q,p)_{,qp}G^{a,n} + (n-a)H(q,p)_{,pp}G^{a+1,n}$$

Evolución cuántica Vs. Evolución semiclásica Quantum dynamics

- Las ecuaciones de Schrödinger pueden ser reescritas ahora como las ecuaciones de Hamilton de un conjunto infinito de grados de libertad donde $H_Q := \langle H(\hat{x}^i)\rangle$

$$\dot{x}^i = \{x^i, H_Q\}$$

$$\dot{G}^{i_1,\ldots,i_n} = \{G^{i_1,\ldots,i_n}, H_Q\}$$

- Si las variables cuánticas son pequeñas, se dice que el sistema es semiclásico. Definimos asi una *expansión semiclásica* por la inclusión progresiva de grados de libertad cuánticos.
- Así, cuando las relaciones de incertidumbre son casi saturadas $G^{qq}G^{pp} - (G^{qp})^2 \approx \frac{\hbar^2}{4}$, y $[G^{i_1,\ldots,i_n}] \approx \hbar^{n/2}$. Entonces, a primer orden en $\hbar$, las ecuaciones cuánticas vienen dadas por

$$\dot{x}^i = \epsilon^{ij}\left(H(q,p)_{,j} + \frac{1}{2}H(q,p)_{,jkl}\,G^{kl}\right) + O(\hbar^2)$$

$$\dot{G}^{a,n} = -aH(q,p)_{,qq}G^{a-1,n} + (n-2a)H(q,p)_{,qp}G^{a,n} + (n-a)H(q,p)_{,pp}G^{a+1,n}$$

Estados coherentes dinámicos perturbativos

- A 1er orden en $\hbar$, usando el Hamiltoniano $H_Q(x^i, G's)$ junto con $G^{qq}G^{pp} - (G^{qp})^2 = \frac{\hbar^2}{4}$, podemos encontrar una solución general

$$G^{i_1,\ldots,i_{2n}} = \frac{(2n)!}{2^n n!} G^{(i_1,i_2} \cdots G^{i_{2n-1},i_{2n})}.$$

- Esto implica que el estado del sistema viene dado como

$$\langle p'|q,p\rangle_G = \frac{1}{(2\pi G^{pp})^{1/4}} e^{-\frac{1}{2G^{pp}}(1+iG^{qp})(p'-p)^2+ip'q}$$

- Por lo tanto, la estructura simpléctica es Pull-back

$$\Omega_{|q,p\rangle_G} = \Omega(\tilde{\mathrm{d}}|q,p\rangle_G, \tilde{\mathrm{d}}|q,p\rangle_G) = 2\mathrm{d}q \wedge \mathrm{d}p + \frac{1}{2G^{pp}} \mathrm{d}G^{qp} \wedge \mathrm{d}G^{pp}$$

Estados coherentes dinámicos perturbativos

- A 1er orden en $\hbar$, usando el Hamiltoniano $H_Q(x^i, G's)$ junto con $G^{qq}G^{pp} - (G^{qp})^2 = \frac{\hbar^2}{4}$, podemos encontrar una solución general

$$G^{i_1,\ldots,i_{2n}} = \frac{(2n)!}{2^n n!} G^{(i_1,i_2} \ldots G^{i_{2n-1},i_{2n})}.$$

- Esto implica que el estado del sistema viene dado como

$$\langle p'|q,p\rangle_G = \frac{1}{(2\pi G^{pp})^{1/4}} e^{-\frac{1}{2G^{pp}}(1+iG^{qp})(p'-p)^2 + ip'q}$$

- Por lo tanto, la estructura simpléctica es ▸ Pull-back

$$\Omega_{|q,p\rangle_G} = \Omega(\tilde{\mathrm{d}}|q,p\rangle_G, \tilde{\mathrm{d}}|q,p\rangle_G) = 2\mathrm{d}q \wedge \mathrm{d}p + \frac{1}{2G^{pp}} \mathrm{d}G^{qp} \wedge \mathrm{d}G^{pp}$$

Estados coherentes dinámicos perturbativos

- A 1er orden en $\hbar$, usando el Hamiltoniano $H_Q(x^i, G's)$ junto con $G^{qq}G^{pp} - (G^{qp})^2 = \frac{\hbar^2}{4}$, podemos encontrar una solución general

$$G^{i_1,\dots,i_{2n}} = \frac{(2n)!}{2^n n!} G^{(i_1,i_2} \dots G^{i_{2n-1},i_{2n})}.$$

- Esto implica que el estado del sistema viene dado como

$$\langle p'|q,p\rangle_G = \frac{1}{(2\pi G^{pp})^{1/4}} e^{-\frac{1}{2G^{pp}}(1+iG^{qp})(p'-p)^2+ip'q}$$

- Por lo tanto, la estructura simpléctica es Pull-back

$$\Omega_{|q,p\rangle_G} = \Omega(\tilde{\mathrm{d}}|q,p\rangle_G, \tilde{\mathrm{d}}|q,p\rangle_G) = 2\mathrm{d}q \wedge \mathrm{d}p + \frac{1}{2G^{pp}} \mathrm{d}G^{qp} \wedge \mathrm{d}G^{pp}$$

Dinámica efectiva

- La evolución efectiva está determinada por la solución a las ecuaciones cuánticas $G^{ij}(q,p)$

$$\dot{x}^i = f^i(x^i, G^{ij}(q,p)) + O(\hbar^2).$$

- Ejemplo: El oscilador anarmónico $H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + U(q)$. Las ecuaciones para G^{ij} son resueltas en un límite adiabático

$$G_0^{qq} = \frac{\hbar}{2\sqrt{1+\frac{U''}{m\omega^2}}},\ G_0^{qp} = 0 \text{ y } G_0^{pp} = \frac{\hbar}{2}\sqrt{1+\frac{U''}{m\omega^2}}$$

- Finálmente, a segundo orden en la expansión adiabática, las ecuaciones para las variables clásicas donde se ha usado $G^{ij}(q,p)$ concuerdan con las obtenidas por la Acción efectiva

$$\Gamma_{\rm eff}[q(t)] = \int dt \left[\frac{1}{2}\left(m + \frac{\hbar U'''(q)^2}{2^5 m^2 \left(\omega^2 + \frac{U''(q)}{m}\right)^{\frac{5}{2}}} \right) \dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 - U(q) - \frac{\hbar\omega}{2}\left(1 + \frac{U''(q)}{m\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Dinámica efectiva

- La evolución efectiva está determinada por la solución a las ecuaciones cuánticas $G^{ij}(q,p)$

$$\dot{x}^i = f^i(x^i, G^{ij}(q,p)) + O(\hbar^2).$$

- Ejemplo: El oscilador anarmónico $H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + U(q)$. Las ecuaciones para G^{ij} son resueltas en un límite adiabático

$$G_0^{qq} = \frac{\hbar}{2\sqrt{1+\frac{U''}{m\omega^2}}},\ G_0^{qp} = 0 \text{ y } G_0^{pp} = \frac{\hbar}{2}\sqrt{1+\frac{U''}{m\omega^2}}$$

- Finálmente, a segundo orden en la expansión adiabática, las ecuaciones para las variables clásicas donde se ha usado $G^{ij}(q,p)$ concuerdan con las obtenidas por la Acción efectiva

$$\Gamma_{\mathrm{eff}}[q(t)] = \int \mathrm{d}t \left[\frac{1}{2}\left(m + \frac{\hbar U'''(q)^2}{2^5 m^2\left(\omega^2 + \frac{U''(q)}{m}\right)^{\frac{5}{2}}}\right)\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 - U(q) - \frac{\hbar\omega}{2}\left(1 + \frac{U''(q)}{m\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

Dinámica efectiva

- La evolución efectiva está determinada por la solución a las ecuaciones cuánticas $G^{ij}(q,p)$
$$\dot{x}^i = f^i(x^i, G^{ij}(q,p)) + O(\hbar^2).$$
- Ejemplo: El oscilador anarmónico $H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + U(q)$. Las ecuaciones para G^{ij} son resueltas en un límite adiabático
$$G_0^{qq} = \frac{\hbar}{2\sqrt{1+\frac{U''}{m\omega^2}}},\quad G_0^{qp} = 0 \text{ y } G_0^{pp} = \frac{\hbar}{2}\sqrt{1+\frac{U''}{m\omega^2}}$$
- Finálmente, a segundo orden en la expansión adiabática, las ecuaciones para las variables clásicas donde se ha usado $G^{ij}(q,p)$ concuerdan con las obtenidas por la Acción efectiva
$$\Gamma_{\mathrm{eff}}[q(t)] = \int \mathrm{d}t \left[\frac{1}{2}\left(m + \frac{\hbar U'''(q)^2}{2^5 m^2 \left(\omega^2 + \frac{U''(q)}{m}\right)^{\frac{5}{2}}} \right)\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 - U(q) - \frac{\hbar\omega}{2}\left(1 + \frac{U''(q)}{m\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

El campo escalar cuántico

- Consideremos $\hat{\varphi}(x)$ y $\hat{p}_\varphi(x)$ como los operadores fundamentales que actúan sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y siguen las relaciones de conmutación

$$[\hat{\varphi}(x), \hat{p}_\varphi(y)] = i\hbar\delta^{(3)}(x-y),$$

- La evolución cuántica está especificada por $\mathcal{H}$ y el Hamiltoniano

$$\hat{H} = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3x \left[\frac{1}{2}\hat{p}_\varphi^2 + \frac{1}{2}\nabla\hat{\varphi}\cdot\nabla\hat{\varphi} + \frac{m^2}{2}\hat{\varphi}^2 + U(\hat{\varphi})\right].$$

- Dado que el contenido de un estado está especificado en las funciones de n puntos, usamos los valores medios del producto simetrizado de n operadores fundamentales como las coordenadas del espacio de Hilbert

$$\varphi(x) := \langle\hat{\varphi}(x)\rangle, p_\varphi(x) := \langle\hat{p}_\varphi(x)\rangle \text{ y } G^{a,n}(x_1, \cdots, x_n)$$

$$G^{0,n}(x_1, \cdots, x_n) := \langle(\hat{\varphi}(x_1) - \varphi(x_1)) \cdots (\hat{\varphi}(x_n) - \varphi(x_n))\rangle$$

El campo escalar cuántico

- Consideremos $\hat{\varphi}(x)$ y $\hat{p}_\varphi(x)$ como los operadores fundamentales que actúan sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y siguen las relaciones de conmutación

$$[\hat{\varphi}(x), \hat{p}_\varphi(y)] = i\hbar\delta^{(3)}(x - y),$$

- La evolución cuántica está especificada por $\mathcal{H}$ y el Hamiltoniano

$$\hat{H} = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3x \left[\frac{1}{2}\hat{p}_\varphi^2 + \frac{1}{2}\nabla\hat{\varphi}\cdot\nabla\hat{\varphi} + \frac{m^2}{2}\hat{\varphi}^2 + U(\hat{\varphi})\right].$$

- Dado que el contenido de un estado está especificado en las funciones de n puntos, usamos los valores medios del producto simetrizado de n operadores fundamentales como las coordenadas del espacio de Hilbert

$$\varphi(x) := \langle\hat{\varphi}(x)\rangle, p_\varphi(x) := \langle\hat{p}_\varphi(x)\rangle \text{ y } G^{a,n}(x_1, \cdots, x_n)$$

$$G^{0,n}(x_1, \cdots, x_n) := \langle(\hat{\varphi}(x_1) - \varphi(x_1))\cdots(\hat{\varphi}(x_n) - \varphi(x_n))\rangle$$

El campo escalar cuántico

- Consideremos $\hat{\varphi}(x)$ y $\hat{p}_\varphi(x)$ como los operadores fundamentales que actúan sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y siguen las relaciones de conmutación

$$[\hat{\varphi}(x), \hat{p}_\varphi(y)] = i\hbar\delta^{(3)}(x-y),$$

- La evolución cuántica está especificada por $\mathcal{H}$ y el Hamiltoniano

$$\hat{H} = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3x \left[\frac{1}{2}\hat{p}_\varphi^2 + \frac{1}{2}\nabla\hat{\varphi}\cdot\nabla\hat{\varphi} + \frac{m^2}{2}\hat{\varphi}^2 + U(\hat{\varphi})\right].$$

- Dado que el contenido de un estado está especificado en las funciones de n puntos, usamos los valores medios del producto simetrizado de n operadores fundamentales como las coordenadas del espacio de Hilbert

$$\varphi(x) := \langle\hat{\varphi}(x)\rangle, p_\varphi(x) := \langle\hat{p}_\varphi(x)\rangle \text{ y } G^{a,n}(x_1, \cdots, x_n)$$

$$G^{0,n}(x_1, \cdots, x_n) := \langle(\hat{\varphi}(x_1) - \varphi(x_1))\cdots(\hat{\varphi}(x_n) - \varphi(x_n))\rangle$$

Ecuaciones cuánticas de campo a primer orden en $\hbar$

- Asumiendo un potencial $U(\varphi(x)) = \frac{\lambda}{4!}\varphi(x)^4$ y usando $G_k^{a,2}(x) = \int \mathrm{d}^3y e^{ik(y-x)} G^{a,2}(x-\frac{y}{2}, \frac{y}{2})$

$$H_Q = H + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\left[G_k^{2,2}(2x) + (k^2+m^2+\frac{\lambda}{2}\varphi(x)^2)G_k^{0,2}(2x)\right]$$

- Las equaciones de campo generadas son

$$\dot{\varphi}(x) = p_\varphi(x)$$

$$\dot{p}_\varphi(x) = (\partial_x^2 - m^2)\varphi(x) - \frac{\lambda}{6}\varphi(x)^3 - \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{\lambda}{2}\varphi(x)G_k^{0,2}(2x)$$

- Y para los grados de libertad cuánticos

$$\dot{G}_k^{b,2}(x) = (\delta_{b,1}+2\delta_{b,0})G_k^{b+1,2}(x) - (\delta_{b,1}+2\delta_{b,2})(m^2+k^2-\partial_x^2)G_k^{b-1,2}(x)$$

$$-\frac{\lambda}{2}(\delta_{b,1}+2\delta_{b,2})\int \mathrm{d}^3y \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\cos ky \cos py\, \varphi^2((y+x)/2)G_p^{b-1,2}(x)$$

Ecuaciones cuánticas de campo a primer orden en $\hbar$

- Asumiendo un potencial $U(\varphi(x)) = \frac{\lambda}{4!}\varphi(x)^4$ y usando $G_k^{a,2}(x) = \int \mathrm{d}^3y e^{ik(y-x)} G^{a,2}(x - \frac{y}{2}, \frac{y}{2})$

$$H_Q = H + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\left[G_k^{2,2}(2x) + (k^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi(x)^2)G_k^{0,2}(2x)\right]$$

- Las equaciones de campo generadas son

$$\dot{\varphi}(x) = p_\varphi(x)$$

$$\dot{p}_\varphi(x) = (\partial_x^2 - m^2)\varphi(x) - \frac{\lambda}{6}\varphi(x)^3 - \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{\lambda}{2}\varphi(x)G_k^{0,2}(2x)$$

- Y para los grados de libertad cuánticos

$$\dot{G}_k^{b,2}(x) = (\delta_{b,1} + 2\delta_{b,0})G_k^{b+1,2}(x) - (\delta_{b,1} + 2\delta_{b,2})(m^2 + k^2 - \partial_x^2)G_k^{b-1,2}(x)$$
$$-\frac{\lambda}{2}(\delta_{b,1} + 2\delta_{b,2})\int \mathrm{d}^3y \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \cos ky \cos py \, \varphi^2((y+x)/2)G_p^{b-1,2}(x)$$

Ecuaciones cuánticas de campo a primer orden en $\hbar$

- Asumiendo un potencial $U(\varphi(x)) = \frac{\lambda}{4!}\varphi(x)^4$ y usando $G_k^{a,2}(x) = \int \mathrm{d}^3 y e^{ik(y-x)} G^{a,2}(x-\frac{y}{2}, \frac{y}{2})$

$$H_Q = H + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3 x \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3}\left[G_k^{2,2}(2x) + (k^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi(x)^2) G_k^{0,2}(2x)\right]$$

- Las equaciones de campo generadas son

$$\dot{\varphi}(x) = p_\varphi(x)$$

$$\dot{p}_\varphi(x) = (\partial_x^2 - m^2)\varphi(x) - \frac{\lambda}{6}\varphi(x)^3 - \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3}\frac{\lambda}{2}\varphi(x) G_k^{0,2}(2x)$$

- Y para los grados de libertad cuánticos

$$\dot{G}_k^{b,2}(x) = (\delta_{b,1} + 2\delta_{b,0}) G_k^{b+1,2}(x) - (\delta_{b,1} + 2\delta_{b,2})(m^2 + k^2 - \partial_x^2) G_k^{b-1,2}(x)$$
$$-\frac{\lambda}{2}(\delta_{b,1} + 2\delta_{b,2})\int \mathrm{d}^3 y \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \cos ky \cos py \, \varphi^2((y+x)/2) G_p^{b-1,2}(x)$$

Summary and conclusions

- Hemos estudiado diversos regímenes semiclásicos de sistemas cuánticos como sistemas clásicos con grados de libertad adicionales.
- Se desarrolló un método para obtener ecuaciones efectivas que concuerdan con las obtenidas por medio de la integral de caminos en cierta clase de ejemplos.
- Proseguimos en la construcción de estados dinámicos coherentes perturbativos.
- Se generalizó el escenario para el estudio de teorías cuánticas de campo.

Summary and conclusions

- Hemos estudiado diversos regímenes semiclásicos de sistemas cuánticos como sistemas clásicos con grados de libertad adicionales.
- Se desarrolló un método para obtener ecuaciones efectivas que concuerdan con las obtenidas por medio de la integral de caminos en cierta clase de ejemplos.
- Proseguimos en la construcción de estados dinámicos coherentes perturbativos.
- Se generalizó el escenario para el estudio de teorías cuánticas de campo.

Summary and conclusions

- Hemos estudiado diversos regímenes semiclásicos de sistemas cuánticos como sistemas clásicos con grados de libertad adicionales.
- Se desarrolló un método para obtener ecuaciones efectivas que concuerdan con las obtenidas por medio de la integral de caminos en cierta clase de ejemplos.
- Proseguimos en la construcción de estados dinámicos coherentes perturbativos.
- Se generalizó el escenario para el estudio de teorías cuánticas de campo.

Summary and conclusions

- Hemos estudiado diversos regímenes semiclásicos de sistemas cuánticos como sistemas clásicos con grados de libertad adicionales.
- Se desarrolló un método para obtener ecuaciones efectivas que concuerdan con las obtenidas por medio de la integral de caminos en cierta clase de ejemplos.
- Proseguimos en la construcción de estados dinámicos coherentes perturbativos.
- Se generalizó el escenario para el estudio de teorías cuánticas de campo.

Flat FRW's inhomogeneous perturbations [Mukhanov'92]

- In general, scalar inhomogeneous pertubations around FRW universe can be described up to coordinate transformations by

$$ds^2 = -a^2(\eta)(1+2\phi)\mathrm{d}\eta^2 + a^2(\eta)(1-2\phi)\mathrm{d}\vec{x}^2$$

- Thus, the Einstein equations to zeroth and first order in ϕ are

$$3\frac{\dot{a}}{a}^2 = \kappa a^2 \bar{T}^0_0, \quad \frac{\kappa}{2} a^2 \bar{T}^a_a = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \text{ and}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\phi - 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} - 3\frac{\dot{a}^2}{a^2}\phi &= \frac{\kappa}{2}a^2\delta T^0_0 \\
\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{\cdot}\phi + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\phi &= \frac{\kappa}{2}a^2\delta T^a_a \\
\partial_a(\dot{\phi} + \frac{\dot{a}}{a}\phi) &= \frac{\kappa}{2}a^2\delta T^0_a
\end{aligned}$$

Flat FRW's inhomogeneous perturbations[Mukhanov'92]

- In general, scalar inhomogeneous pertubations around FRW universe can be described up to coordinate transformations by

$$\mathrm{d}s^2 = -a^2(\eta)(1+2\phi)\mathrm{d}\eta^2 + a^2(\eta)(1-2\phi)\mathrm{d}\vec{x}^2$$

- Thus, the Einstein equations to zeroth and first order in ϕ are

$$3\frac{\dot{a}}{a}^2 = \kappa a^2 \bar{T}^0_0, \quad \frac{\kappa}{2}a^2\bar{T}^a_a = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \text{ and}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\phi - 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} - 3\frac{\dot{a}^2}{a^2}\phi &= \frac{\kappa}{2}a^2\delta T^0_0 \\
\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{\cdot}\phi + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\phi &= \frac{\kappa}{2}a^2\delta T^a_a \\
\partial_a(\dot{\phi} + \frac{\dot{a}}{a}\phi) &= \frac{\kappa}{2}a^2\delta T^0_a
\end{aligned}$$

Semiclassical loop quantum cosmology corrections

- In a Hamiltonian framework ▸ Full Hamiltonian, using Ashtekar variables[Ashtekar'87,Barbero'95], let us restrict to the cosmological scenario where

$$E^a_i(x) = p(x)\delta^a_i := a^2(1-2\phi)\delta^a_i$$

and

$$A^i_a(x) = k(x)\delta^i_a + \Gamma^i_a(p(x))$$

- Regularize the Hamiltonian on a graph(cubic lattice) and quantize ▸ LQG and LQC choosing the Hilbert space as $(\mathcal{H}_{LQC})^E$ where E is the number of edges[Bojowald,Skirzewski,et al.'06].
- Now, as in LQG [Thiemann'98] ▸ α behavior

$$\langle\widehat{p^{-\frac{1}{2}}}\rangle := \frac{1}{\mu_0\ell_p^2}\left\langle\sqrt{\hat{p}+\mu_0\ell_p^2}-\sqrt{\hat{p}-\mu_0\ell_p^2}\right\rangle = \alpha(p)p^{-\frac{1}{2}} + O(G^{ij\cdots})$$

Semiclassical loop quantum cosmology corrections

- In a Hamiltonian framework Full Hamiltonian, using Ashtekar variables[Ashtekar'87,Barbero'95], let us restrict to the cosmological scenario where

$$E^a_i(x) = p(x)\delta^a_i := a^2(1-2\phi)\delta^a_i$$

 and

$$A^i_a(x) = k(x)\delta^i_a + \Gamma^i_a(p(x))$$

- Regularize the Hamiltonian on a graph(cubic lattice) and quantize LQG and LQC choosing the Hilbert space as $(\mathcal{H}_{LQC})^E$ where E is the number of edges[Bojowald,Skirzewski,et al.'06].
- Now, as in LQG [Thiemann'98] α behavior

$$\langle \widehat{p^{-\frac{1}{2}}} \rangle := \frac{1}{\mu_0 \ell_p^2} \left\langle \sqrt{\hat{p} + \mu_0 \ell_p^2} - \sqrt{\hat{p} - \mu_0 \ell_p^2} \right\rangle = \alpha(p) p^{-\frac{1}{2}} + O(G^{ij\cdots})$$

Semiclassical loop quantum cosmology corrections

- In a Hamiltonian framework Full Hamiltonian, using Ashtekar variables[Ashtekar'87,Barbero'95], let us restrict to the cosmological scenario where

$$E_i^a(x) = p(x)\delta_i^a := a^2(1-2\phi)\delta_i^a$$

and

$$A_a^i(x) = k(x)\delta_a^i + \Gamma_a^i(p(x))$$

- Regularize the Hamiltonian on a graph(cubic lattice) and quantize LQG and LQC choosing the Hilbert space as $(\mathcal{H}_{LQC})^E$ where E is the number of edges[Bojowald,Skirzewski,et al.'06].
- Now, as in LQG [Thiemann'98] α behavior

$$\langle \widehat{p^{-\frac{1}{2}}} \rangle := \frac{1}{\mu_0 \ell_p^2} \left\langle \sqrt{\hat{p} + \mu_0 \ell_p^2} - \sqrt{\hat{p} - \mu_0 \ell_p^2} \right\rangle = \alpha(p) p^{-\frac{1}{2}} + O(G^{ij\cdots})$$

Quantum corrected Hamiltonian

- The semiclassical limit of the quantum Hamiltonian of the inhomogeneous LQC and a scalar field is

$$H_Q[N] = \frac{1}{2\kappa}\int \mathrm{d}^3x N(x)\alpha(p(x))\Bigg(-6k(x)^2|p(x)|^{1/2} + 2\frac{\beta(p(x))\nabla^2 p(x)}{|p(x)|^{1/2}} + \frac{1}{2}\frac{(\beta(p(x))^2 + 4a^2\beta'(p(x)) - 4\beta(p(x)))\partial^a p(x)\partial_a p(x)}{|p(x)|^{3/2}}\Bigg) + H_\varphi[N]$$

- And the corrected diffeomorphisms constraint is

$$D_Q[N^a] = \frac{1}{\kappa}\int \mathrm{d}^3x N^a(x)\left(2a^2\partial_a k(x) - \tilde{\beta}(p(x))\bar{k}\partial_a p(x)\right) + D_\varphi[N^a]$$

Quantum corrected Hamiltonian

- The semiclassical limit of the quantum Hamiltonian of the inhomogeneous LQC and a scalar field is

$$H_Q[N] = \frac{1}{2\kappa}\int \mathrm{d}^3x N(x)\alpha(p(x))\left(-6k(x)^2|p(x)|^{1/2} + 2\frac{\beta(p(x))\nabla^2 p(x)}{|p(x)|^{1/2}} + \frac{1}{2}\frac{(\beta(p(x))^2 + 4a^2\beta'(p(x)) - 4\beta(p(x)))\partial^a p(x)\partial_a p(x)}{|p(x)|^{3/2}}\right) + H_\varphi[N]$$

- And the corrected diffeomorphisms constraint is

$$D_Q[N^a] = \frac{1}{\kappa}\int \mathrm{d}^3x N^a(x)\left(2a^2\partial_a k(x) - \tilde{\beta}(p(x))\bar{k}\partial_a p(x)\right) + D_\varphi[N^a]$$

Corrected evolution equations

- Homogeneous:

$$3\frac{\dot{a}}{a}^2 = \kappa\alpha a^2 T_{\varphi}{}^0{}_0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) + \left(1 - 2a^2\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{\kappa}{2}\alpha a^2 T_{\varphi}{}^a{}_a$$

- Inhomogeneous:

$$\alpha^2\beta\Delta\phi - 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} - 3\left(1 - a^2\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\frac{\dot{a}^2}{a^2}\phi = \frac{1}{2}\kappa\alpha a^2\delta T_{\varphi}{}^0{}_0$$

$$2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\left(1 - a^2\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\phi + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\left[1 - 5a^2\frac{\alpha'}{\alpha} - 2a^4\frac{\alpha''}{\alpha} + 4a^4\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2\right]\phi$$

$$+\frac{\dot{a}}{a}\left(3 - 2a^2\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\dot{\phi} + \ddot{\phi} + \frac{\alpha^2\beta}{3}\left(\beta - 1 - 4a^2\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\Delta\phi = \frac{\kappa}{2}\alpha a^2\delta T_{\varphi}{}^a{}_a$$

$$\partial_a\left(\dot{\phi} + \frac{\dot{a}}{a}\phi\left(2 - \tilde{\beta} - 2\alpha' a^2/\alpha\right)\right) = \frac{\kappa}{2}a^2\delta T_{\varphi}{}^0{}_a, \quad (1)$$

Corrected evolution equations

- Homogeneous:

$$3\frac{\dot{a}}{a}^2 = \kappa\alpha a^2 T_{\varphi}{}^0_0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) + (1 - 2a^2\frac{\alpha'}{\alpha})\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{\kappa}{2}\alpha a^2 T_{\varphi}{}^a_a$$

- Inhomogeneous:

$$\alpha^2\beta\Delta\phi - 3\tfrac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} - 3(1 - a^2\tfrac{\alpha'}{\alpha})\tfrac{\dot{a}^2}{a^2}\phi = \tfrac{1}{2}\kappa\alpha a^2\delta T_{\varphi}{}^0{}_0$$

$$2\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{\dot{a}}{a}\right)(1 - a^2\tfrac{\alpha'}{\alpha})\phi + \left(\tfrac{\dot{a}}{a}\right)^2\left[1 - 5a^2\tfrac{\alpha'}{\alpha} - 2a^4\tfrac{\alpha''}{\alpha} + 4a^4\left(\tfrac{\alpha'}{\alpha}\right)^2\right]\phi$$

$$+\tfrac{\dot{a}}{a}(3 - 2a^2\tfrac{\alpha'}{\alpha})\dot{\phi} + \ddot{\phi} + \tfrac{\alpha^2\beta}{3}(\beta - 1 - 4a^2\tfrac{\alpha'}{\alpha})\Delta\phi = \tfrac{\kappa}{2}\alpha a^2\delta T_{\varphi}{}^a{}_a$$

$$\partial_a\left(\dot{\phi} + \tfrac{\dot{a}}{a}\phi(2 - \tilde{\beta} - 2\alpha' a^2/\alpha)\right) = \tfrac{\kappa}{2}a^2\delta T_{\varphi}{}^0{}_a, \tag{1}$$

Quantum evolution equations

- Hamiltonian constraint

$$-k^2\phi_k - 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi}_k - 3\frac{\dot{a}^2}{a^2}\phi_k = \delta T_{\varphi\,0k}^{\;0\,\mathrm{class}}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k'}(a^{-6}\tau G^{2,2}_{k-k',k'} + (m^2 - \sigma k'\cdot(k-k')/a^2)G^{0,2}_{k-k',k'})$$

- Diffeomorphisms constraint

$$k_a(\dot{\phi}_k + \frac{\dot{a}}{a}\phi_k) = \delta T_{\varphi\,ak}^{\;0\,\mathrm{class}} + \sum_{k'}(k-k')_a G^{1,2}_{k-k',k'}$$

- Equations of motion

$$-\ddot{\phi}_k - 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi}_k - 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{\cdot}\phi_k - 3\frac{\dot{a}^2}{a^2}\phi_k = \delta T_{\varphi\,ak}^{\;a\,\mathrm{class}}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k'}(a^{-6}\tau G^{2,2}_{k-k',k'} - (m^2 - \sigma k'\cdot(k-k')/3a^2)G^{0,2}_{k-k',k'})$$

Quantum evolution equations

- Hamiltonian constraint

$$-k^2\phi_k - 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi}_k - 3\frac{\dot{a}^2}{a^2}\phi_k = \delta T_{\varphi 0k}^{0^{\text{class}}}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k'}(a^{-6}\tau G^{2,2}_{k-k',k'} + (m^2 - \sigma k'\cdot(k-k')/a^2)G^{0,2}_{k-k',k'})$$

- Diffeomorphisms constraint

$$k_a(\dot{\phi}_k + \frac{\dot{a}}{a}\phi_k) = \delta T_{\varphi ak}^{0^{\text{class}}} + \sum_{k'}(k-k')_a G^{1,2}_{k-k',k'}$$

- Equations of motion

$$-\ddot{\phi}_k - 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi}_k - 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{\cdot}\phi_k - 3\frac{\dot{a}^2}{a^2}\phi_k = \delta T_{\varphi ak}^{a^{\text{class}}}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k'}(a^{-6}\tau G^{2,2}_{k-k',k'} - (m^2 - \sigma k'\cdot(k-k')/3a^2)G^{0,2}_{k-k',k'})$$

Quantum evolution equations

- Hamiltonian constraint

$$-k^2\phi_k - 3\frac{\dot a}{a}\dot\phi_k - 3\frac{\dot a^2}{a^2}\phi_k = \delta T_{\varphi\,0k}^{\;0\,\mathrm{class}}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k'}(a^{-6}\tau G^{2,2}_{k-k',k'} + (m^2 - \sigma k'\cdot(k-k')/a^2)G^{0,2}_{k-k',k'})$$

- Diffeomorphisms constraint

$$k_a(\dot\phi_k + \frac{\dot a}{a}\phi_k) = \delta T_{\varphi\,ak}^{\;0\,\mathrm{class}} + \sum_{k'}(k-k')_a G^{1,2}_{k-k',k'}$$

- Equations of motion

$$-\ddot\phi_k - 3\frac{\dot a}{a}\dot\phi_k - 2\left(\frac{\dot a}{a}\right)^{\cdot}\phi_k - 3\frac{\dot a^2}{a^2}\phi_k = \delta T_{\varphi\,ak}^{\;a\,\mathrm{class}}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k'}(a^{-6}\tau G^{2,2}_{k-k',k'} - (m^2 - \sigma k'\cdot(k-k')/3a^2)G^{0,2}_{k-k',k'})$$

Dynamical coherent states

Back

- Consider the Hilbert space $\mathcal{H}$ and a representation of a Lie algebra acting on it defined by the Cartan subalgebra $[\hat{H}_i, \hat{H}_j] = 0$ and the laddering operators $\hat{E}_\alpha$

$$[\hat{H}_i, \hat{E}_\alpha] = \alpha_i \hat{E}_\alpha, [\hat{E}_\alpha, \hat{E}_{-\alpha}] = \alpha_i \hat{H}_i, \textit{ and } [\hat{E}_\alpha, \hat{E}_\beta] = N_{\alpha\beta} \hat{E}_{\alpha+\beta}$$

- Define an extremal vector $|ext\rangle \in \mathcal{H}$ such that $\hat{E}_{-\alpha}|ext\rangle = 0$
- Using that finite transformation of the Lie group

$$e^{i\gamma_i \hat{H}_i + \eta_\alpha \hat{E}_\alpha - \bar{\eta}_\alpha \hat{E}_{-\alpha}}|ext\rangle = e^{\zeta_\beta \hat{E}_\beta - \bar{\zeta}_\beta \hat{E}_{-\beta}}|ext\rangle e^{i\phi}$$

- The space of coherent states $|\zeta\rangle$ is a subspace of $\mathcal{H}/\mathbb{C}$, where

$$|\zeta\rangle := e^{\zeta_\beta \hat{E}_\beta - \bar{\zeta}_\beta \hat{E}_{-\beta}}|ext\rangle \tag{2}$$

- (2) are dynamical coherent states if the Hamiltonian of the quantum system is a lie algebra element

$$\hat{H}(t) = h_i(t)\hat{H}_i + f_\alpha(t)\hat{E}_\alpha + \bar{f}_\alpha(t)\hat{E}_{-\alpha}$$

Dynamical coherent states ▸ Back

- Consider the Hilbert space $\mathcal{H}$ and a representation of a Lie algebra acting on it defined by the Cartan subalgebra $[\hat{H}_i, \hat{H}_j] = 0$ and the laddering operators $\hat{E}_\alpha$

$$[\hat{H}_i, \hat{E}_\alpha] = \alpha_i \hat{E}_\alpha, [\hat{E}_\alpha, \hat{E}_{-\alpha}] = \alpha_i \hat{H}_i, \; \textit{and} \; [\hat{E}_\alpha, \hat{E}_\beta] = N_{\alpha\beta} \hat{E}_{\alpha+\beta}$$

- Define an extremal vector $|ext\rangle \in \mathcal{H}$ such that $\hat{E}_{-\alpha}|ext\rangle = 0$
- Using that finite transformation of the Lie group

$$e^{i\gamma_i \hat{H}_i + \eta_\alpha \hat{E}_\alpha - \bar{\eta}_\alpha \hat{E}_{-\alpha}} |ext\rangle = e^{\zeta_\beta \hat{E}_\beta - \bar{\zeta}_\beta \hat{E}_{-\beta}} |ext\rangle e^{i\phi}$$

- The space of coherent states $|\zeta\rangle$ is a subspace of $\mathcal{H}/\mathbb{C}$, where

$$|\zeta\rangle := e^{\zeta_\beta \hat{E}_\beta - \bar{\zeta}_\beta \hat{E}_{-\beta}} |ext\rangle \tag{2}$$

- (2) are dynamical coherent states if the Hamiltonian of the quantum system is a lie algebra element

$$\hat{H}(t) = h_i(t)\hat{H}_i + f_\alpha(t)\hat{E}_\alpha + \bar{f}_\alpha(t)\hat{E}_{-\alpha}$$

Dynamical coherent states ▸ Back

- Consider the Hilbert space $\mathcal{H}$ and a representation of a Lie algebra acting on it defined by the Cartan subalgebra $[\hat{H}_i, \hat{H}_j] = 0$ and the laddering operators $\hat{E}_\alpha$

$$[\hat{H}_i, \hat{E}_\alpha] = \alpha_i \hat{E}_\alpha, [\hat{E}_\alpha, \hat{E}_{-\alpha}] = \alpha_i \hat{H}_i, \textit{ and } [\hat{E}_\alpha, \hat{E}_\beta] = N_{\alpha\beta}\hat{E}_{\alpha+\beta}$$

- Define an extremal vector $|ext\rangle \in \mathcal{H}$ such that $\hat{E}_{-\alpha}|ext\rangle = 0$
- Using that finite transformation of the Lie group

$$e^{i\gamma_i \hat{H}_i + \eta_\alpha \hat{E}_\alpha - \bar{\eta}_\alpha \hat{E}_{-\alpha}}|ext\rangle = e^{\zeta_\beta \hat{E}_\beta - \bar{\zeta}_\beta \hat{E}_{-\beta}}|ext\rangle e^{i\phi}$$

- The space of coherent states $|\zeta\rangle$ is a subspace of $\mathcal{H}/\mathbb{C}$, where

$$|\zeta\rangle := e^{\zeta_\beta \hat{E}_\beta - \bar{\zeta}_\beta \hat{E}_{-\beta}}|ext\rangle \tag{2}$$

- (2) are dynamical coherent states if the Hamiltonian of the quantum system is a lie algebra element

$$\hat{H}(t) = h_i(t)\hat{H}_i + f_\alpha(t)\hat{E}_\alpha + \bar{f}_\alpha(t)\hat{E}_{-\alpha}$$

Dynamical coherent states

Back

- Consider the Hilbert space $\mathcal{H}$ and a representation of a Lie algebra acting on it defined by the Cartan subalgebra $[\hat{H}_i, \hat{H}_j] = 0$ and the laddering operators $\hat{E}_\alpha$

$$[\hat{H}_i, \hat{E}_\alpha] = \alpha_i \hat{E}_\alpha, [\hat{E}_\alpha, \hat{E}_{-\alpha}] = \alpha_i \hat{H}_i, \text{ and } [\hat{E}_\alpha, \hat{E}_\beta] = N_{\alpha\beta} \hat{E}_{\alpha+\beta}$$

- Define an extremal vector $|ext\rangle \in \mathcal{H}$ such that $\hat{E}_{-\alpha}|ext\rangle = 0$
- Using that finite transformation of the Lie group

$$e^{i\gamma_i \hat{H}_i + \eta_\alpha \hat{E}_\alpha - \bar{\eta}_\alpha \hat{E}_{-\alpha}}|ext\rangle = e^{\zeta_\beta \hat{E}_\beta - \bar{\zeta}_\beta \hat{E}_{-\beta}}|ext\rangle e^{i\phi}$$

- The space of coherent states $|\zeta\rangle$ is a subspace of $\mathcal{H}/\mathbb{C}$, where

$$|\zeta\rangle := e^{\zeta_\beta \hat{E}_\beta - \bar{\zeta}_\beta \hat{E}_{-\beta}}|ext\rangle \tag{2}$$

- (2) are dynamical coherent states if the Hamiltonian of the quantum system is a lie algebra element

$$\hat{H}(t) = h_i(t)\hat{H}_i + f_\alpha(t)\hat{E}_\alpha + \bar{f}_\alpha(t)\hat{E}_{-\alpha}$$

Dynamical coherent states ▸ Back

- Consider the Hilbert space $\mathcal{H}$ and a representation of a Lie algebra acting on it defined by the Cartan subalgebra $[\hat{H}_i, \hat{H}_j] = 0$ and the laddering operators $\hat{E}_\alpha$

$$[\hat{H}_i, \hat{E}_\alpha] = \alpha_i \hat{E}_\alpha, [\hat{E}_\alpha, \hat{E}_{-\alpha}] = \alpha_i \hat{H}_i, \; and \; [\hat{E}_\alpha, \hat{E}_\beta] = N_{\alpha\beta}\hat{E}_{\alpha+\beta}$$

- Define an extremal vector $|ext\rangle \in \mathcal{H}$ such that $\hat{E}_{-\alpha}|ext\rangle = 0$
- Using that finite transformation of the Lie group

$$e^{i\gamma_i \hat{H}_i + \eta_\alpha \hat{E}_\alpha - \bar{\eta}_\alpha \hat{E}_{-\alpha}}|ext\rangle = e^{\zeta_\beta \hat{E}_\beta - \bar{\zeta}_\beta \hat{E}_{-\beta}}|ext\rangle e^{i\phi}$$

- The space of coherent states $|\zeta\rangle$ is a subspace of $\mathcal{H}/\mathbb{C}$, where

$$|\zeta\rangle := e^{\zeta_\beta \hat{E}_\beta - \bar{\zeta}_\beta \hat{E}_{-\beta}}|ext\rangle \qquad (2)$$

- (2) are dynamical coherent states if the Hamiltonian of the quantum system is a lie algebra element

$$\hat{H}(t) = h_i(t)\hat{H}_i + f_\alpha(t)\hat{E}_\alpha + \bar{f}_\alpha(t)\hat{E}_{-\alpha}$$

Pull-back to a submanifold of the projective Hilbert space Back

- The restriction to the projective Hilbert space $\mathcal{P}$ can be carried out by restricting to the subspace $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$ and considering only functions that are independent of the global phase, and the restriction to its tangent space can be achieved by projecting the vector fields through $\eta \to \tilde{\eta} := \eta - \Psi\langle\Psi|\eta\rangle$
- A subspace of $\mathcal{P}$ can be defined by introducing an n dimensional family of normalized states $|x_1, \cdots, x_n\rangle$ and the pull-back to it can be defined through

$$\tilde{\mathrm{d}}|x_1, \cdots, x_n\rangle = (1 - |x_1, \cdots, x_n\rangle\langle x_1, \cdots, x_n|)\mathrm{d}|x_1, \cdots, x_n\rangle$$

- Therefore, for certain choices of the submanifold, a non-degenerated metric and the symplectic structure can be obtained from

$$\tilde{\mathrm{d}}(\langle x_1, \cdots, x_n|) \otimes \tilde{\mathrm{d}}(|x_1, \cdots, x_n\rangle)$$

Pull-back to a submanifold of the projective Hilbert space

Back

- The restriction to the projective Hilbert space $\mathcal{P}$ can be carried out by restricting to the subspace $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$ and considering only functions that are independent of the global phase, and the restriction to its tangent space can be achieved by projecting the vector fields through $\eta \to \tilde{\eta} := \eta - \Psi\langle\Psi|\eta\rangle$
- A subspace of $\mathcal{P}$ can be defined by introducing an n dimensional family of normalized states $|x_1, \cdots, x_n\rangle$ and the pull-back to it can be defined through

$$\tilde{\mathrm{d}}|x_1, \cdots, x_n\rangle = (1 - |x_1, \cdots, x_n\rangle\langle x_1, \cdots, x_n|)\mathrm{d}|x_1, \cdots, x_n\rangle$$

- Therefore, for certain choices of the submanifold, a non-degenerated metric and the symplectic structure can be obtained from

$$\tilde{\mathrm{d}}(\langle x_1, \cdots, x_n|) \otimes \tilde{\mathrm{d}}(|x_1, \cdots, x_n\rangle)$$

Pull-back to a submanifold of the projective Hilbert space

Back

- The restriction to the projective Hilbert space $\mathcal{P}$ can be carried out by restricting to the subspace $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$ and considering only functions that are independent of the global phase, and the restriction to its tangent space can be achieved by projecting the vector fields through $\eta \to \tilde{\eta} := \eta - \Psi\langle\Psi|\eta\rangle$
- A subspace of $\mathcal{P}$ can be defined by introducing an n dimensional family of normalized states $|x_1, \cdots, x_n\rangle$ and the pull-back to it can be defined through

$$\tilde{\mathrm{d}}|x_1, \cdots, x_n\rangle = (1 - |x_1, \cdots, x_n\rangle\langle x_1, \cdots, x_n|)\mathrm{d}|x_1, \cdots, x_n\rangle$$

- Therefore, for certain choices of the submanifold, a non-degenerated metric and the symplectic structure can be obtained from

$$\tilde{\mathrm{d}}(\langle x_1, \cdots, x_n|) \otimes \tilde{\mathrm{d}}(|x_1, \cdots, x_n\rangle)$$

Hamiltonian formalism in Ashtekar variables

Back

- Ashtekar variables $A^i_a = \Gamma^i_a + \gamma K^i_a$ and $E^a_i E^b_i = q^{ab} \det q$, these follow the relations

$$\{A^i_a(x), E^b_j(y)\} = \gamma\kappa\delta^b_a\delta^i_j\delta^{(3)}(x-y)$$

- In a Hamiltonian formulation GR is a constrained system

$$G[\Lambda^i] = \int \mathrm{d}^3x \Lambda^i(\partial_a E^a_i + \epsilon^{ijk} E^a_j A^k_a), \quad D_G[N^a] = \frac{1}{\gamma\kappa}\int \mathrm{d}^3x N^a F^i_{ab} E^b_i$$

$$H_G[N] = \frac{1}{2\kappa}\int_\Sigma \mathrm{d}^3x N \left|\det E\right|^{-1/2}\left(\epsilon_{ijk} F^i_{ab} E^a_j E^b_k - 2(1+\gamma^2) K^i_a K^j_b E^{[a}_i E^{b]}_j\right)$$

where $F^i_{ab} = \partial_a A^i_b - \partial_b A^i_a + \epsilon^{ijk} A^j_a A^k_b$ is the curvature of the Ashtekar connection.

Hamiltonian formalism in Ashtekar variables

Back

- Ashtekar variables $A^i_a = \Gamma^i_a + \gamma K^i_a$ and $E^a_i E^b_i = q^{ab} \det q$, these follow the relations

$$\{A^i_a(x), E^b_j(y)\} = \gamma\kappa\delta^b_a\delta^i_j\delta^{(3)}(x-y)$$

- In a Hamiltonian formulation GR is a constrained system

$$G[\Lambda^i] = \int \mathrm{d}^3x \Lambda^i(\partial_a E^a_i + \epsilon^{ijk} E^a_j A^k_a), \quad D_G[N^a] = \frac{1}{\gamma\kappa}\int \mathrm{d}^3x N^a F^i_{ab} E^b_i$$

$$H_G[N] = \frac{1}{2\kappa}\int_\Sigma \mathrm{d}^3x N \left|\det E\right|^{-1/2} \left(\epsilon_{ijk} F^i_{ab} E^a_j E^b_k - 2(1+\gamma^2) K^i_a K^j_b E^{[a}_i E^{b]}_j\right)$$

where $F^i_{ab} = \partial_a A^i_b - \partial_b A^i_a + \epsilon^{ijk} A^j_a A^k_b$ is the curvature of the Ashtekar connection.

Loop quantum gravity & Cosmology

Back

- Use holonomies and fluxes as fundamental variables

$$h_e[A] = \mathcal{P}e^{\int_e \mathrm{d}x^a A^j_a \tau_j}, \; E_j(S) = \int_S E^a_j n_a$$
$$\{h_e[A], E_j(S)\} = \frac{\gamma\kappa}{2}\sigma(e,S)\tau_j h_e[A]$$

- Regularize the Hamiltonian constraint using

$$\frac{\epsilon^{ikl}\epsilon_{abc}E^b_k E^c_l}{|\det E|^{-1/2}} = \frac{4}{\kappa\gamma}\{A^i_a, V\} \propto \lim_{\mu\to 0} tr\left(\tau^i_j h_a(\mu)\{h^{-1}_a(\mu), V\}\right)$$

- LQG:Choose the Ashtekar-Lewandowski measure for the Hilbert space and Quantize!

- LQC: Set $\hat{h}_e[A] = \widehat{e^{\mu_0 c \Lambda^i_e \tau_i}}$ and $\hat{E}^a_i = (\Lambda^{-1})^a_i \hat{p}$ and choose $L^2(\mathbb{R}_B, dx)$ as the Hilbert space.

Loop quantum gravity & Cosmology

Back

- Use holonomies and fluxes as fundamental variables

$$h_e[A] = \mathcal{P}e^{\int_e \mathrm{d}x^a A^j_a \tau_j}, \quad E_j(S) = \int_S E^a_j n_a$$
$$\{h_e[A], E_j(S)\} = \frac{\gamma\kappa}{2}\sigma(e,S)\tau_j h_e[A]$$

- Regularize the Hamiltonian constraint using

$$\frac{\epsilon^{ikl}\epsilon_{abc}E^b_k E^c_l}{|\det E|^{-1/2}} = \frac{4}{\kappa\gamma}\left\{A^i_a, V\right\} \propto \lim_{\mu\to 0} tr\left(\tau^i_j h_a(\mu)\left\{h^{-1}_a(\mu), V\right\}\right)$$

- LQG:Choose the Ashtekar-Lewandowski measure for the Hilbert space and Quantize!
- LQC: Set $\hat{h}_e[A] = \widehat{e^{\mu_0 c \Lambda^i_e \tau_i}}$ and $\hat{E}^a_i = (\Lambda^{-1})^a_i \hat{p}$ and choose $L^2(\mathbb{R}_B, dx)$ as the Hilbert space.

Loop quantum gravity & Cosmology

Back

- Use holonomies and fluxes as fundamental variables

$$h_e[A] = \mathcal{P}e^{\int_e \mathrm{d}x^a A_a^j \tau_j}, \ E_j(S) = \int_S E_j^a n_a$$
$$\{h_e[A], E_j(S)\} = \frac{\gamma\kappa}{2}\sigma(e,S)\tau_j h_e[A]$$

- Regularize the Hamiltonian constraint using

$$\frac{\epsilon^{ikl}\epsilon_{abc}E_k^b E_l^c}{|\det E|^{-1/2}} = \frac{4}{\kappa\gamma}\{A_a^i, V\} \propto \lim_{\mu\to 0} tr\left(\tau_j^i h_a(\mu)\{h_a^{-1}(\mu), V\}\right)$$

- LQG:Choose the Ashtekar-Lewandowski measure for the Hilbert space and Quantize!
- LQC: Set $\hat{h}_e[A] = \widehat{e^{\mu_0 c \Lambda_e^i \tau_i}}$ and $\hat{E}_i^a = (\Lambda^{-1})_i^a \hat{p}$ and choose $L^2(\mathbb{R}_B, dx)$ as the Hilbert space.

Loop quantum gravity & Cosmology

Back

- Use holonomies and fluxes as fundamental variables

$$h_e[A] = \mathcal{P} e^{\int_e \mathrm{d}x^a A_a^j \tau_j}, \quad E_j(S) = \int_S E_j^a n_a$$
$$\{h_e[A], E_j(S)\} = \frac{\gamma\kappa}{2} \sigma(e, S) \tau_j h_e[A]$$

- Regularize the Hamiltonian constraint using

$$\frac{\epsilon^{ikl} \epsilon_{abc} E_k^b E_l^c}{|\det E|^{-1/2}} = \frac{4}{\kappa\gamma} \{A_a^i, V\} \propto \lim_{\mu \to 0} tr\left(\tau_j^i h_a(\mu) \{h_a^{-1}(\mu), V\}\right)$$

- LQG:Choose the Ashtekar-Lewandowski measure for the Hilbert space and Quantize!
- LQC: Set $\hat{h}_e[A] = \widehat{e^{\mu_0 c \Lambda_e^i \tau_i}}$ and $\hat{E}_i^a = (\Lambda^{-1})_i^a \hat{p}$ and choose $L^2(\mathbb{R}_B, dx)$ as the Hilbert space.

Tipical behavior for α and β Back